

- Шаронов В. В., Видимость далеких предметов и огней, гл. II, VII, IX, Военмориздат, 1944.
 Шаронов В. В., Измерение и расчет видимости далеких предметов, гл. I, II, VII, Гостехиздат, 1947.

§ 8

- Васильев А. Н., Инструкция для наблюдений атмосферного режима, Русск. астрон. календарь, пост. часть, 4-е изд., 410—414, 1930.
 Данжон А. и Куде А., Атмосферное волнение, Астрон. журн. 17, № 1, 1940.
 Добронравин П. П., Марков А. В., Никонов В. Б., Харадзе Е. К., Программа и результаты наблюдений по выбору места горной астрономической обсерватории, Бюлл. Астрон. ин-та, № 28, 87—94, 1931; № 29, 95—102, 1931; № 31, 119—129, 1932; № 38, 313—360, 1935.

§ 9

- Бронштэн В. А., Инструкция для наблюдений планет, 1948.
 Воронцов-Вельяминов Б. А., Санютин Н. П. и Федынский В. В., Инструкция для наблюдений планет. Русск. астрон. календарь, пост. часть, 4-е изд., 308—322, 1930.
 Шаронов В. В., Новый способ улучшения визуальных наблюдений планетных дисков, Астрон. циркуляр № 152, 13—14, 1954.
 Lyot B., Planetary and solar observations on the Pic du Midi in 1941, 1942 and 1943, Astrophys. Journ. 101, 255—259, 1945; L'Astronomie 67, 3—21, 1953.

§§ 10 и 11

- Ангелер Б., Научная фотография, Изд. Кубуч, 1933.
 Баранов С. Г., Вопросы теории фотографического воспроизведения, Госкиноиздат, 1949.
 Гольдберг Е., Образование фотографического изображения, Изд. «Огонек».
 Гороховский Ю. Н. и Бартенева О. Д., Атлас спектральных свойств современных фотографических материалов, Изд. Гос. оптич. ин-та, 1942; Журн. техн. физ. 12, 1942.
 Гинзбург В. А., Светофильтры, ОНТИ, 1936.
 Истомин Г. А., Разрешающая способность фотографирующей системы при малых значениях контрастности, Докл. АН СССР 82, № 6, 1952; 84, № 2, 1952; 85, № 5, 1952.
 Мертц К. Л., Цветная фотография, Госкиноиздат, 1949.
 Миз К., Теория фотографических процессов, ИЛ, 1952.
 Паршин И. А., О влиянии диафрагмирования объектива на качество фотографического изображения планет, Учен. зап. Ленингр. ун-та, № 136, 215—224, 1951.
 Чибисов К. В., Теория фотографических процессов, т. I, Кинофотоиздат, 1935.
 Фаас В. А., Светофильтры, Кинофотоиздат, 1936.
 Шаронов В. В., Фотографическая иррадиация и ее влияние на снимки планетных дисков, Астрон. журн. 27, 116—122, 1950.
 Шаронов В. В., Общая теория визуальной и фотографической видимости деталей планетного диска, Вестник Ленингр. ун-та 9, № 11, 33—46, 1954.
 Edson B., Resolving power in planetary photographs, Publ. Astron. Soc. Pacific 49, № 291, 281—282, 1937.
 Leighton R., Concerning the problem of making sharper photographs of the planets, Scient. Americ. 194, № 6, 156—166, 1956.

ГЛАВА III

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

§ 12. Диск и фазы шарообразного тела

Для невооруженного глаза все планеты имеют вид звездообразных или точечных небесных объектов, что является естественным следствием их малых угловых размеров. Действительно, из данных табл. 7 (стр. 140) следует, что угловой поперечник всех планет лежит ниже указанного в § 7 порога остроты $\delta_n = 1'$. Исключение составляет Венера, диаметр которой в условиях нижнего соединения может доходить до $64''$. Благодаря этому Венеру можно видеть невооруженным глазом при ее прохождении по солнечному диску в виде черной точки. Известны случаи, когда люди с исключительно высокой остротой зрения могли видеть невооруженным глазом и фазы Венеры.

Уже первые телескопические наблюдения Галилея позволили рассмотреть планеты в виде дисков. Для того чтобы это сделать уверенно, необходимо, чтобы угловой поперечник объекта в поле зрения телескопа составлял около $10'$. Отсюда легко подсчитать то увеличение, которое необходимо для распознавания диска той или иной планеты.

В настоящее время в виде дисков могут наблюдаться восемь больших планет (все, кроме Плутона), четыре наиболее крупных астероида (Веста, Паллада, Церера и Юнона) и шесть спутников (Луна, Ио, Европа, Ганимед, Каллисто и Титан), всего 18 объектов. Есть сообщения о случаях наблюдений дисков и ряда других малых тел из числа астероидов и спутников (например, Рея), но в условиях видимости, близкой к порогу восприятия, в таких случаях всегда бывает трудно отличить действительный диск объекта от дифракционного диска.

В дальнейшем под термином *диск* мы будем понимать проекцию тела планеты или спутника на небесную сферу. Видимая часть диска бывает ограничена с одной стороны проекцией истинного края тела объекта, называемой *лимбом*, а с другой — проекцией границы между освещенной (дневной) и неосвещенной (ночной) частями небесного тела, называемой *терминатором*.

Термины «лимб» и «терминатор» применяются также и к линиям на поверхности небесного тела, которым соответствуют указанные проекции на сфере.

Точки пересечения лимба с терминатором определяют вершины двугрульника, форму которого имеет освещенная часть диска. Если последняя представляется узким серпом, то ее кончики своим видом напоминают рожки, почему и сами указанные точки называют *рогами*, а проведенную через них дугу большого круга — *линией рогов*.

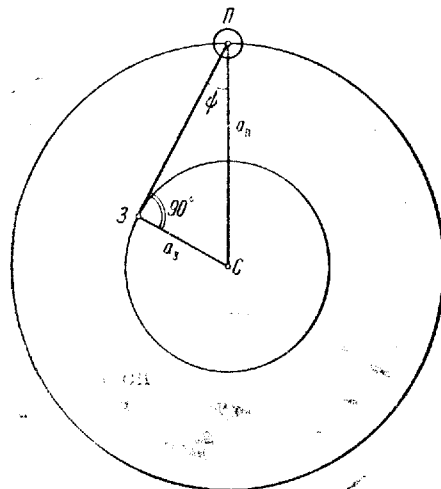


Рис. 22. Фазовый угол.

при центре светила, образуемый направлениями на центр Солнца и на наблюдателя. На рис. 22, где C — Солнце, Z — Земля, а P — планета, это будет угол $\phi = \angle ZPC$, который может изменяться от 0 до 180° . Наблюдать полную последовательность смены фаз мы можем только для трех светил: Луны, Меркурия и Венеры. Для верхних планет и их спутников возможные значения фазового угла ограничиваются пределами, которые тем уже, чем больше расстояние планеты от Солнца. В упрощенной форме это пояснено на рис. 22, где орбиты Земли и планеты представлены в виде окружностей, лежащих в одной плоскости. При таких условиях наибольшее значение фазового угла определяется условием

$$\sin \phi = \frac{a_z}{a_p},$$

где a_z и a_p — радиусы орбит Земли и планеты; оно имеет место при значении элонгации PZC , равной 90° , т. е. в квадратуре, в то время как в верхнем соединении и в противостоянии фазовый

Перемещение линии терминатора по диску определяет явление смены фаз планеты или спутника, известное с незапамятных времен на примере фаз Луны. Данные о диске и фазах планет сообщаются в астрономических ежегодниках, причем угловой полудиамер диска дается на каждый день в общей эфемериде планеты; что же касается сведений о терминаторе и фазах, то они приводятся в особых разделах, называемых *физическими эфемеридами*.

Величина фазы определяется *фазовым углом* (или *углом фазы*). Так называется угол

угол равен нулю. Эксцентриситет и наклон планетных орбит вносят в эти выводы некоторые изменения и, в частности, несколько расширяют пределы ϕ против выражаемых приведенной формулой. Крайние значения углов фазы для каждой планеты приведены в табл. 7. Из данных этой таблицы видно, что проблема фаз имеет существенное значение только для нижних планет и Марса.

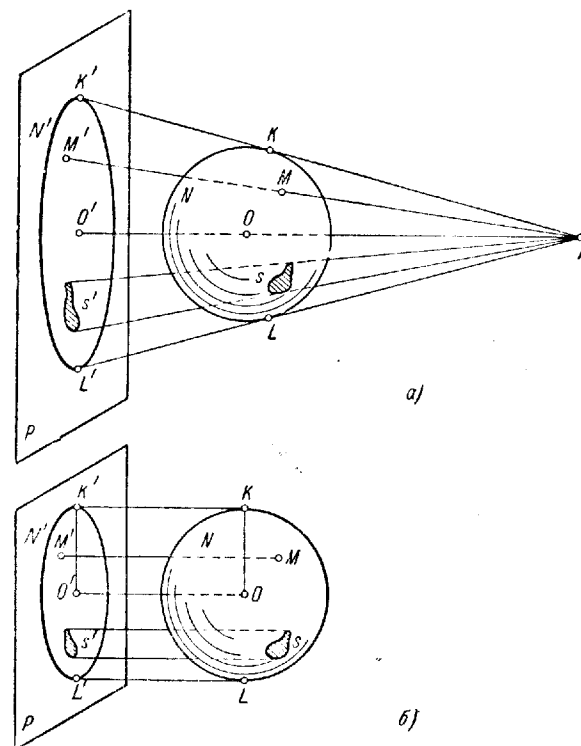


Рис. 23. Виды проекции: а — внешняя, б — ортографическая.

Поскольку все эти планеты имеют ничтожное сжатие, мы ограничимся случаем сферического небесного тела, предварительно напомнив читателю некоторые общие положения теории проекций.

Когда мы смотрим на какой-нибудь объект, то он всегда представляется нам в некоторой перспективе. Для того чтобы построить изображение объекта, обусловливаемое последней, поступаем следующим образом. Пусть N (рис. 23, а) — рассматриваемое тело, а O — его центр. Глаз наблюдателя находится в точке H . Построим плоскость P , нормальную к направлению HO и касательную к топоцентрической небесной сфере в точке O' — проекции центра O . Поскольку диск планеты всегда мал, мы можем не делать различия между плоскостью P и прилегающим к ней участком сферы.

Для того чтобы получить проекцию какой-нибудь точки M поверхности тела N , мы должны провести прямую HM . Точка M' , в которой эта прямая встретит плоскость P , и будет изображением точки M . Чтобы получить проекцию контуров тела N , мы должны построить ряд касательных HKK' , HLL' и т. д.; в том случае, когда тело N представляет собою шар (как у нас на рисунке), эти касательные образуют круговой конус с вершиной в H , сечение которого плоскостью P дает окружность. Некоторая фигура s на поверхности шара будет изображена на плоскости P в виде фигуры s' , площадь и форма которой будут искажены эффектом перспективы. Проектируя на плоскость P достаточное количество точек поверхности тела N , мы получим полное изображение последнего. Основное свойство такого изображения состоит в том, что если удалить тело N , оставить глаз H в прежнем положении и смотреть на полученный на плоскости P чертеж, то наблюдатель будет видеть в точности ту самую картину, которую он воспринимал, когда тело N было на месте. Таким образом, описанный выше прием построения дает чертеж, воспроизводящий видимую для глаза картину с полным учетом перспективы. Поэтому так построенный чертеж называется *перспективной проекцией* объекта.

Плоскость P называют *картинной плоскостью*, прямую $HO O'$ — *осью проекции*, точку H — *центром* или *полюсом проекции*. Последний может занимать на оси HO различные положения, что приводит к различным видам перспективных проекций, соответствующим разным случаям положения глаза наблюдателя по отношению к рассматриваемому предмету. Частный случай проекции шара рассматривается в математической картографии, где приводятся формулы, выражающие зависимость полярных координат точек изображения на плоскости от сферических координат точек на поверхности шара. Нас здесь будет интересовать только тот случай, когда точка H находится вне шара N , что соответствует наблюдению тела извне и приводит к виду перспективной проекции, называемой *внешней*.

Та картина диска планеты или спутника, которую видит наблюдатель в поле зрения телескопа, строго говоря, представляет собою именно внешнюю перспективную проекцию поверхности тела на небесную сферу, причем из точки H видима не половина шара N , а несколько меньшая его часть. Но поскольку расстояние до планеты всегда очень велико по сравнению с ее радиусом, прямые $K'H$, $O'H$, $L'H$ составляют настолько малые углы, что при изучении проекции в первом приближении последними можно пренебречь, полагая центр проекции H в бесконечности, а проектирующие прямые — параллельными между собой. В этом случае мы будем иметь вид перспективной проекции, называемый *ортографической проекцией*, схематически изображенной на

рис. 23, б. Очевидно, что ортографической проекцией M' некоторой точки M объекта будет основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на картинную плоскость P . Шар N в такой проекции изображается в виде круга N' , радиус $O'K'$ которого равен радиусу OK шара. Геометрические соотношения для ортографической проекции несколько проще, чем для внешней, и потому там, где точность это позволяет, последнюю заменяют ортографической.

Рассматривая вопрос о фазах в первом приближении, мы пренебрежем радиусами планеты и Солнца по сравнению с расстояниями планета—Солнце и планета—наблюдатель. Иными словами,

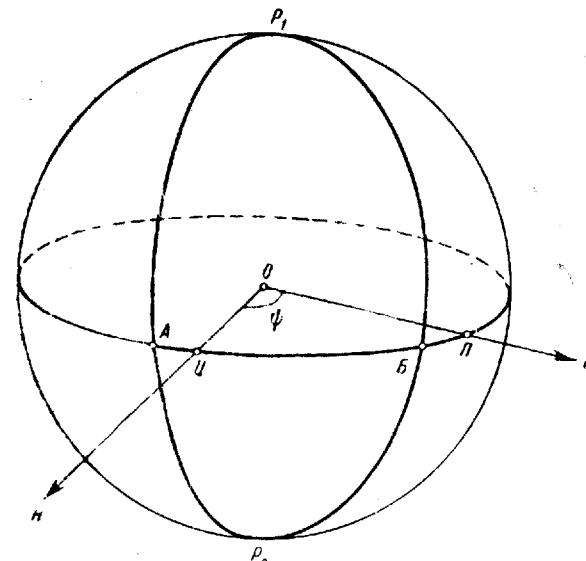


Рис. 24. Лимб и терминатор на поверхности шарообразного тела.

мы будем полагать, что Солнце представляет собою точечный источник света, бесконечно удаленный от планеты, и что наблюдатель тоже рассматривает планету с бесконечно большого расстояния, а потому видит ее на картинной плоскости в ортографической проекции.

То, что получается при сделанных допущениях, представлено на рис. 24. Здесь O — центр планеты, OC — направление на Солнце, OH — направление на наблюдателя. Точка C , в которой прямая OC пересекает поверхность планеты, называется *подсолнечной точкой* или *полюсом освещения*. Точка C пересечения поверхности с прямой OH будет центром видимого диска планеты. Угол $HOC = \psi$ при центре планеты есть *фазовый угол*, а большой круг CCP ,

лежащий в плоскости: центр планеты—наблюдатель—Солнце, называется *экватором интенсивности*.

Большой круг P_1AP_2 , перпендикулярный к прямой OC , будет границей освещенного и неосвещенного полушарий планеты; мы его назовем *ортографическим терминатором*. Большой круг P_1BP_2 , перпендикулярный к прямой HO , ограничивает полушарие планеты, видимое для наблюдателя; мы его назовем *ортографическим лимбом*.

Точки P_1 и P_2 , в которых пересекаются терминатор и лимб и которые являются полюсами по отношению к экватору интенсивности, мы назовем *ортографическими рогами*. Соединяющая их прямая на картинной плоскости или дуга большого круга на сфере представляет собою диаметр диска, называемый *линией рогов*.

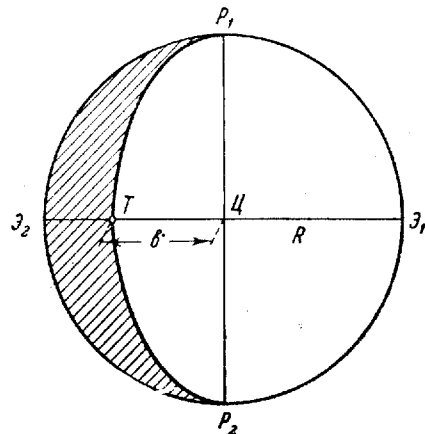


Рис. 25. Пояснение понятия фазы.

Эта линия перпендикулярна к проекции экватора интенсивности. Последняя представляет собою диаметр диска, совпадающий с большим кругом небесной сферы, проведенным через центры дисков планеты и Солнца. Дуга этого круга, заключенная между указанными центрами, составляет *элонгацию* ε планеты.

На картинной плоскости лимб всегда будет полуокружностью, в то время как терминатор представляет собою половину эллипса, большая полуось которого равна радиусу диска R , а малая полуось составляет

$b = R \cos \phi$. Под термином *фаза планеты* понимают отношение величины освещенной части диаметра диска, совпадающего с проекцией экватора интенсивности, ко всей длине этого диаметра, т. е. величину (см. рис. 25)

$$\Phi = \frac{T\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi). \quad (1)$$

Легко видеть, что величина Φ выражает также освещенную долю площади диска. Действительно, площадь последней равна полуокружности $P_1\mathcal{E}_1P_2C$ плюс площадь полуэллипса P_1CP_2T или

$$\frac{1}{2} \pi R^2 + \frac{1}{2} \pi bR,$$

что после подстановки $R \cos \phi$ вместо b и деления на площадь диска πR^2 приводит к формуле (1).

Рассмотрим последовательное изменение фазы с фазовым углом ϕ .

1. $\phi = 0$, $b = R$, $\Phi = 1$. Терминатор совпадает с лимбом, диск полностью освещен. Для Луны такую фазу, реально не наблюдаемую из-за наступающего затмения, называют *истинным полнолунием*, которое не следует смешивать с обычным или календарным полнолунием, поскольку последнее представляет собою лишь соединение Луны с Солнцем по долготе, при котором фазовый угол ϕ в нуль, вообще говоря, не обращается.

2. $0 < \phi < 90^\circ$, $0 < b < R$, $0,5 < \Phi < 1$. Терминатор и лимб находятся по разные стороны линии рогов, диск освещен больше чем наполовину и имеет асимметричную форму, характерную для Луны «на ущербе».

3. $\phi = 90^\circ$, $b = 0$, $\Phi = 0,5$. Терминатор совпадает с линией рогов и потому имеет вид прямой линии, проходящей через центр диска, имеющего форму полукруга. В отношении планеты такая фаза называется *дихотомией*, для Луны — *первой и последней четвертью*.

4. $90^\circ < \phi < 180^\circ$, $-1 < b < 0$, $0 < \Phi < 0,5$. Отрицательный знак b указывает, что терминатор и лимб находятся по одну сторону от линии рогов (со стороны Солнца). Диск имеет форму серпа с вогнутым краем по линии терминатора.

5. $\phi = 180^\circ$, $b = -1$, $\Phi = 0$. Терминатор совпадает с лимбом, но к наблюдателю обращено темное полушарие светила, которое в такой фазе реально наблюдается в условиях прохождения перед солнечным диском.

Переходя к вопросу о фазах во втором приближении, мы не можем уже пренебрегать размерами планеты и Солнца по сравнению с расстояниями. В этом случае лимб будет малым кругом, как это видно из рис. 26, где H — точка наблюдения, а HK_1 и HK_2 — касательные, проведенные из H к шару планеты. Этот малый круг лежит впереди ортографического лимба L_1L_2 на угол L_1OK_1 , равный углу K_1HO , т. е. видимому угловому полудиаметру планеты δ , зона же $L_1K_1K_2L_2$ остается для наблюдателя невидимой. Из треугольника $HO K_1$ имеем:

$$\sin \delta = \frac{OK_1}{OH} = \frac{R_{\pi}}{\Delta}, \quad (2)$$

где R_{π} — линейный радиус планеты, а Δ — ее геоцентрическое расстояние.

Условия освещения, соответствующие рассматриваемому случаю, представлены на рис. 27, где O — центр планеты, а C — центр Солнца. Прямая $ГБ$, касательная к поверхностям планеты и Солнца с одной и той же стороны, определяет положение терминатора $ГГ'$. Этот последний, который можно назвать *геометрическим терминатором*, представляет собою малый круг.

перпендикулярный к прямой OC и лежащий за ортографическим терминатором TT' . Угловое расстояние GT , измеряемое углом GOT , равным углу между прямыми GB и OC , выражается формулой, известной из теории солнечных затмений:

$$\sin GOT = \frac{R_c - R_{\pi}}{\Delta_{\text{пс}}}, \quad (3)$$

где $R_c = CB$ — радиус Солнца, $R_{\pi} = OT'$ — радиус планеты, а $\Delta_{\text{пс}} = OC$ — расстояние между центрами этих небесных тел.

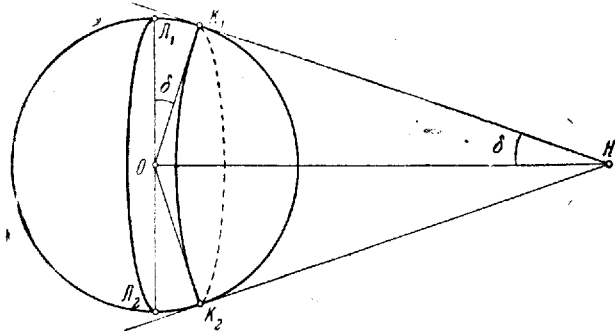


Рис. 26. Лимб светила при конечном расстоянии до наблюдателя.

Таким образом, освещение в рассматриваемом случае распространяется более чем на полушарие планеты, поскольку шаровой пояс $TT'G'T'$ тоже получает солнечный свет, правда не полный, ибо для него над горизонтом находится только часть солнечного диска (для самой линии терминатора GG' — только точка B).

Проведем еще касательную KB' к противоположным краям планеты и Солнца. Малый круг KK' отделяет зону планеты, для которой весь солнечный диск находится над горизонтом. В поясе $KG'K'$ над горизонтом находится только часть солнечного диска. Поэтому в этом поясе, который можно назвать *зоной полутени*, происходит постепенное снижение освещенности по направлению от K к G . Вследствие этого терминатор всегда будет несколько размыт, поскольку в зоне полутени происходит плавное снижение яркости до нуля. Это, в частности, хорошо можно видеть на Луне, наблюдая линию терминатора на ровных пространствах морей при достаточно сильном увеличении, хотя в данном случае значительную роль играет и быстрое снижение косинуса угла падения солнечных лучей у линии терминатора.

Малый круг KK' лежит впереди ортографического терминатора TT' на угол TOK , который в свою очередь равен углу KAO ; последний же выражается формулой

$$\sin KAO = \sin TOK = \frac{R_c + R_{\pi}}{\Delta_{\text{пс}}}. \quad (4)$$

Вся ширина зоны полутени измеряется углом GOK , равным углу BMB' , т. е. угловому диаметру солнечного диска, наблюдаемому с планеты (точнее, из точки M , но различие не имеет значения). Поскольку радиус планеты R_{π} очень мал по сравнению с радиусом Солнца R_c , мы можем им в формулах (3) и (4) пренебречь, что дает:

$$\sin GOT = \sin TOK = \frac{R_c}{\Delta_{\text{пс}}}. \quad (5)$$

Таким образом, с точностью, вполне достаточной для практики, мы можем принять, что малые круги GG' и KK' лежат по отноше-

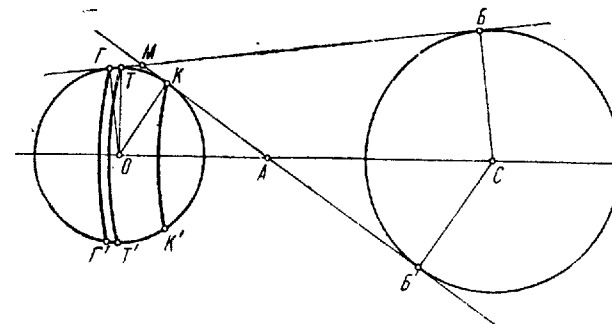


Рис. 27. Терминатор при конечном расстоянии до Солнца.

нию к ортографическому терминатору симметрично, будучи один впереди, а другой позади, на расстоянии углового полудиаметра солнечного диска.

Если планета имеет атмосферу, то влияние последней проявляется прежде всего в эффекте рефракции, смещающей терминатор GG' , а также и малый круг KK' (рис. 27) в сторону ночного полушария, а лимб L_1L_2 (рис. 26) — в сторону невидимого полушария планеты на угол, равный значению горизонтальной рефракции ω . Терминатор, лимб и рога, полученные с учетом этого эффекта, можно назвать *рефракционными*. Поскольку значение горизонтальной рефракции неизвестно с достоверностью ни для одной планеты, понятия эти представляют преимущественно теоретический интерес.

Второй эффект, связанный с наличием атмосферы, составляет сумеречное освещение зоны ночного полушария планеты, примыкающей к рефракционному терминатору, что еще несколько смещает терминатор в сторону ночного полушария. Угловая величина этого смещения, т. е. расстояние между рефракционным терминатором и границей сумеречного пояса со стороны ночного полушария, называется *сумеречной дугой*. Определение величины последней часто являлось задачей наблюдения сумеречных

этот угол будет мал, можем переписать равенство (7) приближенно в форме:

$$\sigma = \varphi \sin U. \quad (8)$$

Если приписать смещения лимба и терминатора только рефракции и пренебречь величиной полудиаметра солнечного диска, то

$$\sigma = \tau = \omega, \quad (9)$$

после чего формула (6) принимает вид:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sin \psi \sin U}{1 - \cos \psi}, \quad (10)$$

что при сохранении только членов первого порядка дает:

$$\sigma = \omega = \frac{1}{2} \varphi \sin U. \quad (11)$$

— выражение, которым многие авторы и пользовались для получения рефракции из удлинения рогов.

Во многих случаях находят удобным заменять углы ψ и φ (в прежнее время в ежегодниках не дававшиеся) элонгацией $\mathcal{E}$, т. е. угловым расстоянием между центрами дисков планеты и Солнца. Из треугольника Солнце — Земля — планета легко получаем:

$$\sin \psi = \frac{\Delta_s}{\Delta_n} \sin \mathcal{E}, \quad (12)$$

где Δ_s и Δ_n — радиусы-векторы Земли и планеты. Учитывая (7), получаем:

$$\sin \sigma = \frac{\Delta_s}{\Delta_n} \sin \mathcal{E} \sin U. \quad (13)$$

Считая выражение $K = \Delta_s/\Delta_n$ постоянным и принимая во внимание малость угла $\mathcal{E}$, для обработки наблюдений удлинения рогов часто применяют формулу

$$\sigma = K \mathcal{E} \sin U, \quad (14)$$

которая после логарифмирования дает:

$$\lg \sin U = \lg \frac{\sigma}{K} - \lg \mathcal{E}. \quad (15)$$

Следовательно, если нанести на график по оси ординат логарифм синуса удлинения, а по оси абсцисс логарифм элонгации, то точки, выражающие отдельные наблюдения, должны лечь по прямой линии. Это и получается на практике. Если же наносить $\sin U$ по аргументу $\mathcal{E}$ или φ , то получаются кривые типа гипербол.

При $\sin \psi = \sin \sigma$ или при $\mathcal{E} = \frac{\sigma}{K}$ получаем $\sin U = 1$, $U = 90^\circ$: рога смыкаются в полное светлое кольцо, окаймляющее неосвещенную часть диска планеты.

На практике удлинение рогов наблюдается только для Венеры, что связано со значительным развитием сумеречных явлений в атмосфере этой планеты. Для Венеры случается наблюдать и полное смыкание рогов в кольцо. Подробности, относящиеся к этим явлениям, будут изложены в § 57. Для Меркурия и Луны наблюдается укорочение рогов. Для очень узкого серпа, каким представляется Луна в возрасте 1 суток, это укорочение очень заметно и при наблюдении невооруженным глазом или в бинокль на фоне сумеречного неба может достигать до 10° . Причина лежит в сильном снижении яркости у терминатора, вызванном тенями от многочисленных неровностей.

§ 13. Диск и фазы планеты, имеющей заметное сжатие

Истинная фигура вращающейся планеты представляет собою сфероид, малая ось которого совпадает с осью вращения. Видимый диск такой планеты, будучи проекцией сфероида на небесную сферу, должен иметь эллиптические очертания. Это действительно имеет место у планет юпитеровой группы, диски которых уже на глаз представляются явно эллиптическими.

Напомним, что фигура сфероида задается значением его полуосей a и b или значением a и эксцентриситетом $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ эллипса меридиана, или же, наконец, значением a и сжатием $\varepsilon = (a - b)/a$, причем между значениями сжатия и эксцентриситета имеются соотношения:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}; \quad (16)$$

$$\varepsilon = \frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2}. \quad (17)$$

Фигура видимого диска планеты определяется как этими элементами, так и направлением на наблюдателя, которое мы зададим углом D , образуемым с плоскостью экватора сфероида прямой, проходящей через центр сфероида и точку наблюдения. Если $D = 0$ и, следовательно, наблюдатель находится в плоскости экватора планеты, то ортогональный лимб будет совпадать с меридианом, плоскость которого перпендикулярна к линии зрения. Очевидно, что в этом случае лимб будет эллипсом, сжатие которого равно сжатию сфероида. Примерно так мы видим

диск Юпитера, для которого угол D заключается в пределах $\pm 3^\circ,5$. При D , отличном от нуля, лимб также будет эллипсом, но со сжатием меньшим, чем у меридиана. Это мы наблюдаем на примере Сатурна, у которого D может доходить до $\pm 28^\circ$. Увеличение D сопровождается монотонным уменьшением видимого сжатия диска ϵ' , и наконец, при $D = 90^\circ$ мы будем иметь $\epsilon' = 0$, поскольку в этом случае линия зрения совпадает с осью вращения планеты, а ортографический лимб — с ее экватором. Этот случай действительно наблюдается для Урана.

Таким образом, возникает задача найти зависимость между видимым сжатием диска ϵ' и истинным сжатием сфероида ϵ . Формулы, выражающие эту зависимость, применяются, с одной стороны, для вычисления видимой фигуры диска, сообщаемой в астрономических ежегодниках, а с другой, — для определения сжатия планеты ϵ по измеренному сжатию ее диска ϵ' .

На поверхности сфероидальной линии терминатора также будет эллипсом, а видимый терминатор на диске — проекцией половины этого эллипса на картинную плоскость. Расчет этой проекции позволяет определить фигуру видимого, т. е. полностью освещенного диска планеты, представляющего собою проекцию освещенной части поверхности сфероидальной. Правда, эта задача имеет меньшее практическое значение, чем в случае шарообразного тела, поскольку планеты, обладающие значительным сжатием, могут наблюдаться только при столь небольших фазовых углах, что эффект фазы на глаз у них вообще незаметен. Однако этот эффект существует; для Юпитера он легко наблюдается при покрытиях спутников диском планеты. Когда покрытие происходит краем диска, лежащим за линией терминатора, то темная часть бывает ясно видна в виде темной полосы, пересекающей светлый диск спутника. Наличие фазы легко обнаруживается также микрометрическими измерениями диска Юпитера и должно учитываться при меридианных и фотометрических наблюдениях этой планеты. Поэтому для Юпитера в эфемеридах сообщаются данные о фазах, в то время как для Сатурна, Урана и Нептуна эти данные в настоящее время не предвычисляются.

Задачу о видимых очертаниях диска небесного тела, имеющего достаточно большое сжатие ϵ , мы рассмотрим только для случая ортографической проекции. Пусть планета представляет собою сфероид с полуосями $OX = a$ и $OZ = b$ (рис. 29) и пусть наблюдатель рассматривает ее по направлению NN' . Построим в точке наблюдения плоскость, параллельную экватору планеты, и обозначим угол ONP , составляемый направлением NN' с этой плоскостью, через φ . Легко сообразить, что $\varphi = -D$, где D — планетоцентрическая широта Земли. Для получения проекции планеты на картинной плоскости необходимо построить цилиндр, образующие KK' которого параллельны линии зрения NN'

и в то же время касательны к поверхности сфероидальной. Геометрическим местом точек касания будет некоторый эллипс $LMUL'Y'$, представляющий собою линию лимба на поверхности тела. Большая ось этого эллипса совпадает с диаметром экватора YY' и потому равна $2a$, малая ось представлена на нашем чертеже прямой LL' . Наша задача состоит в том, чтобы получить уравнение этого эллипса.

Берем систему прямоугольных координат XYZ с началом в центре O сфероидальной; ось OX располагаем в плоскости экватора по линии пересечения плоскости последнего с плоскостью $H'OZ$,

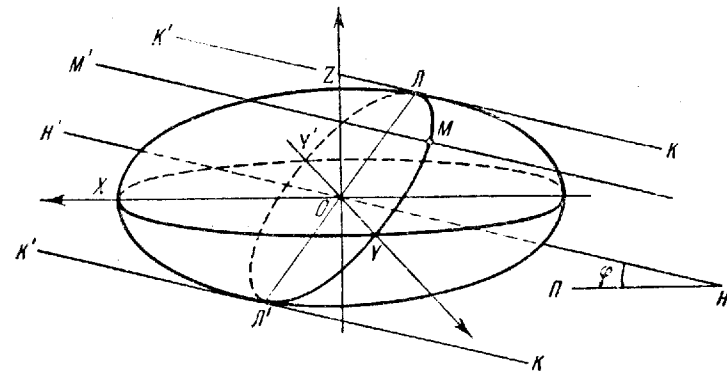


Рис. 29. Лимб планеты, обладающей заметным сжатием.

ось OY направляем также в плоскости экватора по большой оси эллипса $LMUL'$ в ту точку экватора, долгота которой на 90° больше, чем у точки X ; наконец, ось OZ направляем по оси вращения планеты в сторону северного полюса последней.

Возьмем некоторую образующую MM' касательного цилиндра, проходящую через произвольную точку M лимба с координатами x_1, y_1, z_1 , и рассмотрим ее проекции на координатные плоскости. На плоскостях XOY и ZOY эти проекции будут прямыми, перпендикулярными к оси OY , а на плоскости ZOX — прямой, составляющей с осью OX угол φ . Обозначив текущие координаты буквами x, y, z , мы напомним уравнения проекции на плоскостях XOY и XOZ в форме:

$$y - y_1 = A(x - x_1), \quad z - z_1 = B(x - x_1), \quad (18)$$

где A и B — тангенсы углов, составляемых проекциями с осью X . Поскольку точка M лежит на поверхности планеты, ее координаты должны удовлетворять уравнению сфероидальной:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1. \quad (19)$$

Касательную можно рассматривать как секущую с двумя бесконечно близкими точками пересечения с данной поверхностью. Поэтому мы для координат второй точки пересечения можем принять

$$x = x_1 + dx, \quad y = y_1 + dy, \quad z = z_1 + dz,$$

где dx, dy, dz — бесконечно малые приращения координат, удовлетворяющие как уравнению поверхности планеты, так и уравне-

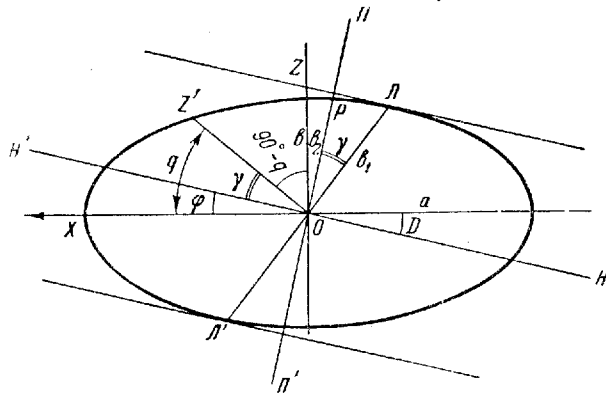


Рис. 30. К вычислению координат на диске планеты, обладающей заметным сжатием.

нию касательной. Это дает нам следующую систему совместных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{a^2} + \frac{z dz}{b^2} &= 0, \\ dy &= A dx, \quad dz = B dx, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

из которой получаем:

$$\frac{x}{a^2} + A \frac{y}{a^2} + B \frac{z}{b^2} = 0. \quad (21)$$

Это выражение представляет собою уравнение плоскости эллипса $ЛМУЛ'$. В силу сказанного выше о направлении проекций прямой $ММ'$ на координатных плоскостях $ХОУ$ и $ХОZ$ мы в этом уравнении должны положить $A = 0$, $B = \operatorname{tg} \varphi$, что дает:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{z}{b^2} \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (22)$$

Обозначая эксцентриситет сфероида через e и вспоминая выражение $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, переписываем это уравнение так:

$$x + \frac{z}{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (23)$$

Обратимся теперь к рис. 30, построенному в плоскости меридиана планеты $ХОZ$. На нем прямая $ЛЛ'$ — по-прежнему малая ось эллипса ортографического лимба, длину которой мы обозначим через $2b_1$. Строим перпендикулярную к ней прямую $ОZ'$ и угол $Z'OX$, образуемый ею с большой осью эллипса меридиана, обозначаем буквой q . Угол q можно выразить через φ , для чего служат формулы:

$$\operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - e^2}; \quad \cos q = \frac{(1 - e^2) \cos \varphi}{Q}; \quad \sin q = \frac{\sin \varphi}{Q}, \quad (24)$$

где

$$Q = \sqrt{\sin^2 \varphi + (1 - e^2) \cos^2 \varphi}.$$

Повернем координатные оси вокруг оси $УУ'$ на угол $90^\circ - q$. У нас получится новая система прямоугольных координат $Х'У'Z'$, причем ось $ОZ$ теперь совпадает с прямой $ОZ'$, а ось $ОХ$ — с $ОЛ'$. Обозначим координаты в новой системе буквами ξ, η, ζ . Поскольку плоскость интересующего нас эллипса $ЛМУЛ'$ совпадает с плоскостью $Х'ОУ'$, мы легко получим уравнение этого эллипса, если подставим новые координаты в уравнение сфероида и положим $\zeta = 0$. Прежние координаты будут теперь связаны с новыми выражениями:

$$x = -\xi \sin q; \quad y = \eta; \quad z = \xi \cos q.$$

Подставляя это в уравнение эллипсоида и пользуясь равенствами (24), получим:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{\xi^2 \sin^2 q}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2 \cos^2 q}{a^2 (1 - e^2)} = \\ &= \frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2 [\sin^2 \varphi + (1 - e^2) \cos^2 \varphi]}{a^2 Q^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

откуда и получаем искомое уравнение ортографического лимба в окончательной форме:

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi)}{a^2 Q^2} = 1. \quad (26)$$

Из этого выражения следует, что малая ось b_1 эллипса $ЛМУЛ'$ равна:

$$b_1 = \frac{aQ}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (27)$$

Видимый диск планеты представляет собою проекцию лимба на картинную плоскость. Последняя перпендикулярна к направлению NN' . Совмещая ее с центром O планеты, мы получим линию пересечения картинной плоскости с плоскостью рисунка в виде прямой $ПП'$, перпендикулярной к NN' . Обозначим двугранный угол, составляемый плоскостью ортографического лимба с картинной плоскостью, через γ . Из рис. 30 следует:

$$\gamma = \angle ЛОП = \angle Z'OH' = q - \varphi.$$

Это позволяет написать:

$$\cos \gamma = \cos (q - \varphi) = \cos q \cos \varphi + \sin q \sin \varphi,$$

или, используя равенства (24):

$$\cos \gamma = \frac{(1 - e^2) \cos^2 \varphi}{Q} + \frac{\sin^2 \varphi}{Q} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \varphi}{Q}. \quad (28)$$

Проекция эллипса $ЛМУЛ'$ на картинной плоскости $ПП'$ будет эллипсом с той же большой осью, поскольку линия их пересечения совпадает с отрезком $УУ'$ (рис. 29), и с малой полуосью b_2 , представленной на рис. 30 отрезком $ОР$. Длина этого отрезка, очевидно, будет:

$$b_2 = b_1 \cos \gamma.$$

Подставляя сюда выражения (27) и (28), получаем:

$$b_2 = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}. \quad (29)$$

Вспоминая соотношение между эксцентриситетом e и сжатием ε , имеющее вид (16), и замечая, что $\cos \varphi = \cos D$, переписываем это выражение окончательно так:

$$b_2 = a \sqrt{1 - (2\varepsilon - \varepsilon^2) \cos^2 D}. \quad (30)$$

Видимое сжатие диска ε_2 выразится так:

$$\varepsilon_2 = \frac{a - b_2}{a} = 1 - \sqrt{1 - (2\varepsilon - \varepsilon^2) \cos^2 D}. \quad (31)$$

Сжатие ε для всех планет представляет собою небольшую величину, а измерения планетных дисков, техника которых будет описана дальше, в настоящее время выполняются с не особенно большой точностью. Поэтому для целей практики часто бывает достаточно сохранить в выражении для ε_2 только члены первого порядка относительно ε . Это дает:

$$\varepsilon_2 = 1 - (1 - 2\varepsilon \cos^2 D)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \cos^2 D. \quad (32)$$

Отсюда формула для расчета истинного значения сжатия сфероид планет ε по измеренному сжатию диска ε_2 получается

в таком виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 \sec^2 D. \quad (33)$$

Задача получения линии терминатора на поверхности тела решается вполне аналогично рассмотренной выше задаче для лимба, только прямая $ОН$ (рис. 29) направляется к центру Солнца, т. е. по радиусу-вектору планеты. Тогда уравнение эллипса ортографического терминатора на поверхности планеты будет выражено в форме, представляемой равенством (26). Для получения терминатора на диске необходимо еще найти проекцию этого эллипса на картинной плоскости. Соответствующие выкладки, а также и конечный результат получаются довольно громоздкими, а потому мы их здесь не приводим, отсылая читателя к оригинальным работам Бесселя или к их сокращенному изложению на русском языке в курсе теоретической астрономии А. Савича.

§ 14. Элементы вращения; физические координаты

Все небесные тела вращаются вокруг оси. Исследование вращения и определение положения оси как в пространстве, так и в проекции на небесной сфере для планет и спутников составляет одну из важных проблем планетоведения. Зная направление оси, можно указать положение полюсов, экватора и сетки меридианов и параллелей на поверхности тела. Это дает возможность получить планетографические координаты (широты и долготы) деталей поверхности небесного тела, что будет подробно изложено в следующей главе.

На практике можно принимать, что ось вращения планеты всегда совпадает с геометрической осью ее сфероида и что положение полюсов на твердой поверхности тела неизменно. Конечно, по аналогии с Землей можно ожидать наличия на планетах явлений, подобных наблюдаемому у нас изменению широт, однако такие явления должны лежать далеко за пределами возможностей наблюдений. Направление оси вращения в пространстве не остается неизменным, так как прецессия и нутация непрерывно его изменяют. Однако нутация мала по величине, а прецессия действует медленно. Поскольку фиксация положения осей планет, основанная на наблюдении перемещения деталей поверхности, в настоящее время выполняется в лучшем случае с точностью до нескольких минут дуги, обнаружить такие изменения наблюдательным путем невозможно, а потому прецессия планетных осей в настоящее время может изучаться только теоретически.

Для отсчета долгот на поверхности тела произвольно выбирают начальный меридиан. Если мы наблюдаем твердую поверхность тела и различаем на ней постоянные детали (Луна, Марс), то

начальный меридиан может проводиться через какое-нибудь резкое и хорошо видимое образование на поверхности планеты. Если видимая поверхность планеты представляет собою облачный покров, лишенный постоянных деталей, то начальный меридиан устанавливается условно и определяется некоторым средним временем оборота в сочетании с произвольно принятым начальным положением.

Меридиан, проходящий через центр диска, называется *центральный*. Поскольку он во вращении планеты не участвует, все меридианы, связанные с поверхностью тела, поочередно с ним совпадают. Соответствующий момент называется *моментом прохождения* данного меридиана (или расположенной на нем детали) через центральный меридиан.

Характер вращения планеты описывается совокупностью величин, называемых *элементами вращения*. Таких величин необходимо задать четыре.

1. *Наклон* i плоскости экватора планеты к основной координатной плоскости.

2. *Долгота восходящего узла экватора* Ω . Под термином «восходящий узел» Ω понимается точка на планетоцентрической сфере, в которой большой круг проекции экватора пересекается с большим кругом координатной плоскости и в которой проекции деталей поверхности переходят с южного полушария сферы на северное. Противоположная точка будет нисходящий узел экватора и обозначается через Ω' .

В качестве основной плоскости, к которой относятся указанные два элемента, принимают:

а) *Плоскость эклиптики*. Соответствующие значения наклона и долготы узла мы будем называть *эклиптикальными* и обозначать через i и Ω без значков. Долгота Ω отсчитывается от точки весеннего равноденствия. Значения i и Ω обычно получаются непосредственно из наблюдений, техника которых будет изложена в § 19.

б) *Плоскость земного экватора*. Соответствующие этому элементы вращения мы будем называть *экваториальными* и обозначать через i_0 и Ω_0 . Вместо них нередко дают экваториальные координаты северного полюса вращения планеты — прямое восхождение α_n и склонение δ_n :

$$\delta_n = 90^\circ - i_0; \quad \alpha_n = \Omega_0 - 90^\circ. \quad (34)$$

в) *Плоскость планетной орбиты*. Получаемые при этом элементы мы будем называть *орбитальными* и обозначать через i_0 и Ω_0 . Точки узлов на орбите, очевидно, соответствуют равноденственным точкам на планетоцентрической сфере данной планеты. При прохождении через них Солнца ортографический терминатор проходит через полюсы планеты и делит все параллели

пополам. Этим определяются моменты равноденствий для данной планеты, а следовательно, и моменты солнцестояний. Вместе с тем угол i_0 , выражая наклон экватора планеты к плоскости ее орбиты, определяет характер смены времен года на планете, поскольку разность полуденных высот Солнца в моменты летнего и зимнего солнцестояний равна $2i_0$. Например, для Юпитера $i_0 = 3^\circ$, так что эта разность составляет всего 6° , и следовательно, смена времен года на Юпитере мало ощутима. Напротив, для Урана $i_0 = 98^\circ$ или, отвлекаясь от направления вращения, 82° , так что амплитуда полуденных высот получается равной 164° , что определяет совершенно особый характер смены времен года на этой планете.

Элементы i , Ω определяют положение оси вращения и экватора в пространстве.

3. *Истинный период вращения* T_n . Под этим термином мы будем понимать промежуток времени, протекающий между двумя последовательными прохождениями плоскости данного меридиана планеты через неподвижную точку небесной сферы. Практически за такую точку можно взять любую звезду, не обнаруживающую заметного собственного движения.

Под *истинным суточным поворотом* планеты ξ_n мы будем понимать угол поворота некоторого меридиана по отношению к неподвижной точке планетоцентрической сферы за земные средние солнечные сутки. Если T_n выражено в земных сутках, то

$$\xi_n = \frac{360^\circ}{T_n}. \quad (35)$$

Помимо истинного периода вращения, могут представлять интерес и другие периоды, связанные с явлением вращения планеты. Так, можно рассматривать промежуток времени, протекающий между двумя последовательными прохождениями плоскости некоторого меридиана планеты через центр солнечного диска, что определяет момент наступления истинного полудня на этом меридиане. Такой период соответствует истинным солнечным суткам на Земле; мы назовем его *солнечным периодом вращения* $T_\odot$. Очевидно, что такой период не будет постоянным, что заставляет ввести в рассмотрение *средний солнечный период вращения* T_s , аналогичный средним солнечным суткам на Земле. Его мы можем определить как промежуток времени, протекающий между двумя последовательными прохождениями плоскости данного меридиана через точку на планетоцентрической сфере, равномерно движущуюся обратным движением в плоскости экватора планеты и обходящую последний за время, равное звездному обороту планеты вокруг Солнца. Если продолжительность последнего, выраженную в средних сутках, обозначить через T_0 , то средний солнечный суточный поворот ξ_s будет связан с истинным суточным

поворотом ξ_n равенством

$$\xi_c = \xi_n - \frac{360^\circ}{T_0}. \quad (36)$$

Можно рассматривать также *равноденственный*, или *тропический период вращения* T_p , определяемый прохождением меридиана планеты через равноденственную точку и аналогичный звездным суткам на Земле. Он будет отличаться от истинного благодаря явлению прецессии. Для планетоведения представляет большой интерес *синодический период вращения* T . Так называется промежуток времени, протекающий между двумя последовательными прохождениями плоскости данного меридиана планеты через точку наблюдения, практически—через центр Земли или, что то же самое, через центр диска светила. Соответствующий этому периоду *синодический суточный поворот* ξ непосредственно получается из наблюдений, выполняемых в целях изучения вращения планеты. Он отличается от истинного из-за перемещения Земли относительно планеты, что для расположенного на планете наблюдателя выражается собственным движением Земли по планетоцентрической сфере. Пусть это движение по прямому восхождению, считаемому по экватору планеты, за средние земные сутки составляет $\Delta\alpha$. Тогда синодический суточный поворот ξ можно выразить равенством

$$\xi = \xi_n - \Delta\alpha. \quad (37)$$

Это равенство позволяет находить ξ_n , а следовательно и T_n , по ξ . Величина $\Delta\alpha$ меняется со временем и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

4. *Эпоха*, или момент t_0 исходного прохождения плоскости начального меридиана через постоянную точку небесной сферы, например через восходящий узел экватора на эклиптике. Это фиксирует положение сетки меридианов. Всякий следующий момент прохождения t_N определяется соотношением

$$t_N = t_0 \pm NT_n, \quad (38)$$

где N —число оборотов, протекших между данным и исходным прохождениями. Если от момента t_N последнего прохождения начального меридиана через узел прошел промежуток времени t , выраженный в средних сутках, то долгота l начального меридиана, считаемая по экватору планеты от точки узла, может быть найдена по формуле

$$l = \xi_n(t - t_N). \quad (39)$$

Для упрощения всякого рода расчетов, связанных с вращением планеты и изменениями очертаний ее диска, вычисляются заранее и публикуются в форме эфемерид специальные данные, обычно называемые устаревшим термином *физические координаты*.

Физические координаты представляют собою собрание величин, определяющих на данный момент видимые очертания диска планеты и положение на нем терминатора, проекции оси вращения, полюсов, а также сетки меридианов и параллелей. В астрономических ежегодниках эфемериды физических координат выделяются в особый раздел (за исключением углового полудиаметра диска, сообщаемого в общих эфемеридах планет).

К числу физических координат относят следующие данные:

1. *Геоцентрический угловой полудиаметр диска* δ . Выражается формулой (2) § 12; на практике вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{\delta_0}{\Delta}, \quad (40)$$

где δ_0 —постоянная величина, представляющая собою угловой полудиаметр планеты для расстояния 1 а. е., а Δ —геоцентрическое расстояние планеты в данный момент, выраженное в астрономических единицах. Для планет с большим сжатием (Юпитер, Сатурн), а также для колец Сатурна сообщаются значения полярного и экваториального полудиаметров или же разность между ними и экваториальный полудиаметр.

Видимый, или топоцентрический полудиаметр δ_T несколько отличается от геоцентрического значения δ , приводимого в астрономических ежегодниках. Это различие выражается формулой

$$\delta_T - \delta = \delta p'' \sin 1'' \cos z, \quad (41)$$

где p'' —экваториальный параллакс, а z —зенитное расстояние. Для планет влияние параллакса нечувствительно, поскольку даже для Венеры и Марса разность $\delta_T - \delta$ не превосходит нескольких тысячных секунды дуги, но для Луны эта разность может достигать $18''$, и потому ее необходимо принимать в расчет.

2. *Фазовый угол* ϕ (во многих ежегодниках обозначаемый i , α или Φ). Для его получения рассмотрим планетоцентрическую сферу с центром O в центре планеты (рис. 31); пусть точки

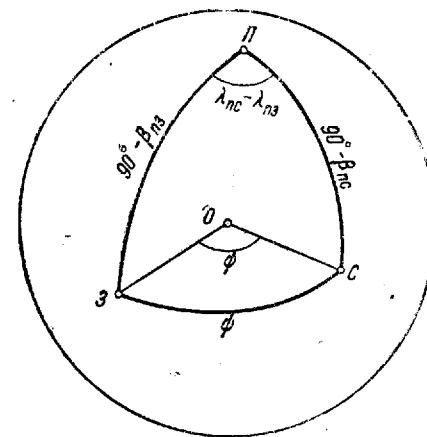


Рис. 31. Расчет фазового угла по эклиптическим координатам планеты и Солнца.

Π , $З$ и $С$ будут соответственно проекциями полюса эклиптики, Земли и Солнца. Очевидно, что искомый угол ϕ выражается на этой сфере дугой $СЗ$. Обозначим планетоцентрические эклип-

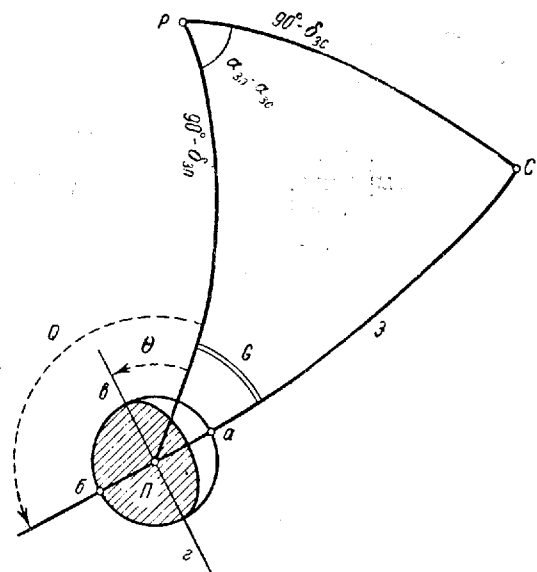


Рис. 32. Расчет элонгации по экваториальным координатам.

тикальные координаты Земли через $\beta_{пз}$ и $\lambda_{пз}$, а такие же координаты Солнца через $\beta_{пс}$ и $\lambda_{пс}$. Тогда в сферическом треугольнике $ЗПС$ будем иметь: $\sphericalangle ЗП = 90^\circ - \beta_{пз}$, $\sphericalangle СП = 90^\circ - \beta_{пс}$, $\sphericalangle СПЗ = \lambda_{пс} - \lambda_{пз}$, откуда

$$\cos \phi = \sin \beta_{пс} \sin \beta_{пз} + \cos \beta_{пс} \cos \beta_{пз} \cos (\lambda_{пс} - \lambda_{пз}).$$

Обозначим геоцентрические эклиптикальные координаты планеты через $\beta_{зп}$ и $\lambda_{зп}$, а ее гелиоцентрические координаты — через $\beta_{сп}$ и $\lambda_{сп}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \beta_{пз} &= -\beta_{зп}; & \beta_{пс} &= -\beta_{сп}; \\ \lambda_{пз} &= \lambda_{зп} + 180^\circ; & \lambda_{пс} &= \lambda_{сп} + 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Подставляя эти значения в (41), получим:

$$\cos \phi = \sin \beta_{зп} \sin \beta_{сп} + \cos \beta_{зп} \cos \beta_{сп} \cos (\lambda_{сп} - \lambda_{зп}), \quad (43)$$

что и позволяет выполнить расчет угла ϕ .

В том случае, когда эклиптикальных координат в распоряжении вычислителя нет, можно воспользоваться сообщаемыми во всех ежегодниках геоцентрическими экваториальными координатами планеты и Солнца, которые мы ради однообразия символов обозначим через $\alpha_{зп}$, $\delta_{зп}$, $\alpha_{зс}$, $\delta_{зс}$, и значениями парал-

лакс $p_{п}$ и $p_{с}$. В этом случае сначала вычисляется элонгация планеты ϑ , для чего служит формула, получаемая из сферического треугольника на геоцентрической сфере, вершинами которого являются (рис. 32): полюс мира P . Солнце C и планета Π .

$$\cos \vartheta = \sin \delta_{зп} \sin \delta_{зс} + \cos \delta_{зп} \cos \delta_{зс} \cos (\alpha_{зп} - \alpha_{зс}). \quad (44)$$

Далее, рассмотрим плоский треугольник планета — Земля — Солнце (рис. 33). В нем угол при планете Π равен ϕ , при Земле $З$ — элонгации ϑ , а угол при Солнце $С$ обозначим через χ . Обозначив геоцентрические расстояния планеты и Солнца через $\Delta_{зп}$ и $\Delta_{зс}$, а радиус-вектор планеты через $\Delta_{пс}$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{\Delta_{зп}}{\Delta_{пс}} \sin \vartheta, \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{\Delta_{зс} \sin \vartheta}{\Delta_{зп} - \Delta_{зс} \cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Вспомогая, что

$$\Delta_{зс} = \frac{R_3}{p_c'' \sin 1''}; \quad \Delta_{зп} = \frac{R_3}{p_{п}'' \sin 1''}, \quad (46)$$

где R_3 — радиус земного экватора, второе равенство (45) выразим через параллаксы:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \vartheta}{\frac{p_c}{p_{п}} - \cos \vartheta}, \quad (47)$$

и перепишем еще так:

$$\operatorname{ctg} \phi = \frac{p_c}{p_{п}} \operatorname{cosec} \vartheta - \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (48)$$

Еще один вариант расчета фазового угла состоит в том, что вычисляют угол χ либо по уже найденной элонгации:

$$\sin \chi = \frac{\Delta_{зп}}{\Delta_{пс}} \sin \vartheta, \quad (49)$$

либо через гелиоцентрические координаты:

$$\cos \chi = \sin \beta_{сз} \sin \beta_{сп} + \cos \beta_{сз} \cos \beta_{сп} \cos (\lambda_{сз} - \lambda_{сп}), \quad (50)$$

после чего получают ϕ по формуле

$$\phi = 180^\circ - \vartheta - \chi. \quad (51)$$

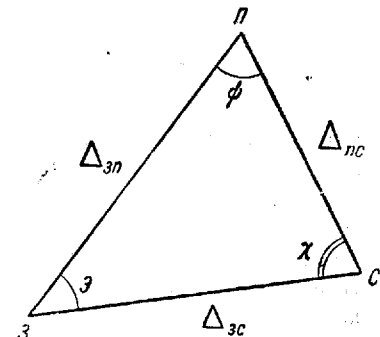


Рис. 33. Расчет фазового угла через геоцентрические расстояния и элонгацию.

Для Луны фазовый угол ϕ до 1960 г. не давался ни в одном ежегоднике, и потому его пока приходится вычислять, для чего удобнее всего воспользоваться селенографическими координатами Земли и Солнца, отнесенными к лунному экватору, которые сообщаются в разделе физических координат Луны, о чем речь будет ниже. Расчет ведется по формуле (41).

3. Фаза Φ или освещенная доля площади диска k . Вычисляется по фазовому углу ϕ при помощи формулы (1). В некоторых ежегодниках для Луны вместо этого дают приближенное выражение фазы Φ' , определяемое формулой

$$\Phi' = \sin^2 \frac{1}{2} (\lambda_{\text{зс}} - \lambda_{\text{зп}}), \quad (52)$$

которая получается, если в равенство (1) подставить значение ϕ , выражаемое формулой (51), и пренебречь как углом χ , так и наклоном лунной орбиты; последнее позволяет заменить элонгацию $\mathcal{E}$ разностью геоцентрических долгот Солнца $\lambda_{\text{зс}}$ и Луны $\lambda_{\text{зп}}$.

Иногда вместо фазы Φ дают «недостачу освещенного диаметра диска» q , совпадающего с проекцией экватора интенсивности. Ее выражают в секундах дуги и находят из равенства

$$q'' = a'' (1 - \cos \phi). \quad (53)$$

4. Позиционный угол G середины светлой дуги лимба. Поскольку эта точка, обозначенная на рис. 32 буквой a , получается как пересечение лимба с большим кругом, соединяющим центры дисков планеты и Солнца, угол G на рис. 32 представлен углом $\angle CIP$; его можно найти, применяя к треугольнику PCP формулы котангенсов:

$$\text{ctg } G = \cos \delta_{\text{зп}} \text{tg } \delta_{\text{зс}} \text{cosec } (\alpha_{\text{зс}} - \alpha_{\text{зп}}) - \sin \delta_{\text{зп}} \text{ctg } (\alpha_{\text{зс}} - \alpha_{\text{зп}}). \quad (54)$$

На практике в ежегодниках вместо угла G обычно дают позиционный угол $\angle PP' = \Theta$ линии рогов, отсчитывая его от северного направления круга склонения к востоку. Принимая во внимание, что при таком способе счета угол G на рис. 32 будет отрицательным, получаем:

$$\Theta = G + 90^\circ. \quad (55)$$

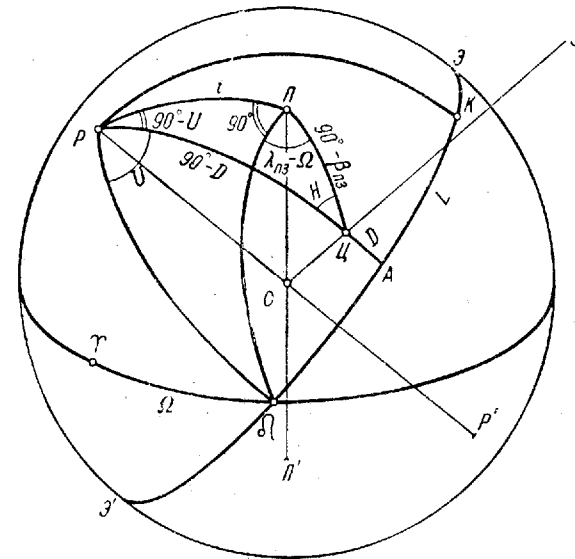
Для Марса и Юпитера вместо этого дают позиционный угол Q «точки лимба с наибольшим дефектом фазы», т. е. соответствующий точке b или середине дуги темной половины лимба. Он, очевидно, равен:

$$Q = \Theta + 90^\circ = 180^\circ + G. \quad (56)$$

Собрание перечисленных величин исчерпывает вопрос о размерах, форме и ориентировке на небесной сфере светлого серпа планеты или спутника. Следующая группа величин дает поло-

жение проекции оси вращения и координатной сетки. Заметим, что проекция центрального меридиана на картинной плоскости будет прямой линией, совпадающей с проекцией оси вращения.

5. Позиционный угол проекции оси вращения или центрального меридиана. Отсчитывается от северного направления круга склонения для северного полюса планеты к востоку и обозначается буквой P .



[Рис. 34. Схема расчета физических координат.

6. Планетоцентрическая широта центра диска планеты D_a . Отсчитывается от плоскости экватора планеты и принимается положительной, если центр диска лежит к северу от последней; она равна также планетоцентрическому склонению Земли, отсчитываемому от экватора планеты. В случае Сатурна плоскость последней принимается совпадающей с плоскостью кольца.

7. Планетоцентрическая долгота L центра диска планеты. Отсчитывается в плоскости экватора последней от условно выбранного начального меридиана, занимающего на поверхности планеты неизменное положение и вращающегося вместе с последней.

Для более детального уяснения перечисленных выше величин рассмотрим рис. 34, на котором изображена планетоцентрическая сфера.

PP' представляет собой ось вращения планеты, $\mathcal{E}'AK\mathcal{E}$ — экватор, OZ — направление на наблюдателя, точка Π — проекция

центра диска, дуга PA — центральный меридиан. Дуга CA представляет собою широту D центра диска. Пусть PK — начальный меридиан; тогда дуга экватора AK выражает долготу L центрального меридиана.

Для расчета величин P , D и L применяют формулы, легко получаемые из сферического треугольника на планетоцентрической сфере, вершинами которого являются: северный полюс планеты P , полюс эклиптики Π и центр диска C (рис. 34). Его стороны будут: $\Pi C = 90^\circ - \beta_{пз}$, $\Pi P = 90^\circ - D$, $PC = i$ — наклон экватора планеты к эклиптике. Точка Ω представляет собою узел экватора на эклиптике и потому $\angle PC\Omega = \angle P\Pi\Omega = 90^\circ$. Угол $\angle PC\Omega = U$ представляет собою долготу центрального меридиана, считаемую от узла; поэтому угол $\angle PC\Pi$ нашего треугольника будет $90^\circ - U$. Угол $\angle C\Pi\Omega$ равен разности долгот Земли и узла $\lambda_{пз} - \Omega$, и потому угол $\angle PC\Pi$ треугольника составляет $90^\circ + (\lambda_{пз} - \Omega)$. Наконец, угол $\angle PC\Pi = H$ представляет собою позиционный угол центрального меридиана, считаемого от круга широты Земли ΠC . Применение формул сферической тригонометрии дает:

$$\left. \begin{aligned} \sin D &= \cos i \sin \beta_{пз} - \sin i \cos \beta_{пз} \cos (\lambda_{пз} - \Omega); \\ \cos D \sin U &= \sin i \sin \beta_{пз} + \cos i \cos \beta_{пз} \sin (\lambda_{пз} - \Omega); \\ \cos D \cos U &= \cos \beta_{пз} \cos (\lambda_{пз} - \Omega), \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

что позволяет найти углы D и U . Для получения угла H используем равенство

$$\sin H \cos D = \sin i \cos (\lambda_{пз} - \Omega). \quad (58)$$

Обозначая через h сферический угол, составляемый кругом широты и кругом склонения, проходящими через точку C , получим искомый угол P :

$$P = H + h. \quad (59)$$

Обратимся к расчету долготы L . Пусть t — момент, для которого делается этот расчет, t_0 — ближайший предыдущий момент прохождения начального меридиана PK через точку узла Ω , а ξ — звездный угол поворота за сутки. Тогда угол $\angle KPC$, выражающий долготу узла от начального меридиана, будет $\xi(t - t_0)$. Следует иметь в виду, что вращение планеты предполагается в направлении от A к K . Угол U мы будем отсчитывать в этом же направлении, а долготы ΩK и AK — в противоположном. Принимая это во внимание, будем иметь:

$$\angle APK = \angle \Omega PK - \angle AP\Omega. \quad (60)$$

Это дает формулу для расчета долгот:

$$L = \xi(t - t_0) - U, \quad (61)$$

причем t и t_0 выражены в сутках. Счет долгот на планетах принято вести навстречу направлению вращения, а потому угол L монотонно возрастает со временем.

В некоторых случаях вместо L или параллельно с нею приводятся моменты прохождения начального меридиана через центр диска на каждый день, выраженные в мировом времени.

Следующая группа величин определяет условия освещения поверхности небесного тела. Такими величинами будут:

8. Планетоцентрическая широта подсолнечной точки D_c , равная планетоцентрическому склонению центра солнечного диска, отсчитываемому от плоскости экватора планеты.

9. Планетоцентрическая долгота L_c подсолнечной точки, отсчитываемая от начального меридиана планеты.

Расчет этих величин выполняется вполне аналогично указанным выше величинам для центра диска, но в формулах координаты $\lambda_{пз}$ и $\beta_{пз}$ заменяются на $\lambda_{пс}$ и $\beta_{пс}$, что дает:

$$\left. \begin{aligned} \sin D_c &= \cos i \sin \beta_{пс} - \sin i \cos \beta_{пс} \sin (\lambda_{пс} - \Omega); \\ \cos D_c \sin U_c &= \sin i \sin \beta_{пс} + \cos i \cos \beta_{пс} \sin (\lambda_{пс} - \Omega); \\ \cos D_c \cos U_c &= \cos \beta_{пс} \cos (\lambda_{пс} - \Omega); \\ L_c &= \xi(t - t_0) - U_c. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

10. Планетоцентрическая долгота Солнца λ'_c , отсчитываемая в плоскости орбиты планеты от точки весеннего равноденствия последней. Определяет сезон на планете, поскольку $\lambda'_c = 0^\circ$ соответствует моменту весеннего равноденствия, $\lambda'_c = 90^\circ$ — летнему солнцестоянию, $\lambda'_c = 180^\circ$ — осеннему равноденствию и $\lambda'_c = 270^\circ$ — зимнему солнцестоянию. Вычисляется по эклиптическим гелиоцентрическим координатам планеты и элементам планетной орбиты.

При вычислении эфемерид физических координат на практике за исходные данные вместо эклиптических координат берут видимые экваториальные геоцентрические координаты планеты α , δ и $\Delta_{вп}$, ее эклиптические гелиоцентрические координаты l , b и r и экваториальные координаты северного полюса планеты $\alpha_{п}$, $\delta_{п}$. Средние значения последних для момента начала фиктивного года t выражаются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1п} &= \alpha_{0п} + \Delta\alpha_{п}(t - t_0); \\ \delta_{1п} &= \delta_{0п} + \Delta\delta_{п}(t - t_0), \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где t_0 — эпоха, для которой даны начальные значения $\alpha_{0п}$ и $\delta_{0п}$, а годовые изменения $\Delta\alpha_{п}$ и $\Delta\delta_{п}$ включают в себя, помимо средней земной прецессии, также прецессию оси самой планеты. Для получения значений координат $\alpha_{п}$ и $\delta_{п}$, отнесенных к эква-

тору данного момента, прибавляют еще поправки:

$$\Delta_2 \alpha_{\Pi} = Aa + Bb + (\Delta \alpha_{\Pi} - a) \tau; \quad \Delta_2 \delta_{\Pi} = Aa' + Bb' + (\Delta \delta_{\Pi} - a') \tau, \quad (64)$$

где A, B, a, b, a' и b' — обычные редуccionные величины (понимаемые в том смысле, как это делалось в Ежегодниках до 1960 г.), а τ — доля фиктивного года, соответствующая данному моменту.

Рассмотрим рис. 35, на котором $\gamma N'$ — земной экватор, $\gamma NN''$ — эклиптика, γ — земная точка весеннего равноденствия, NM_3 — орбита планеты, точка N — восходящий узел последней

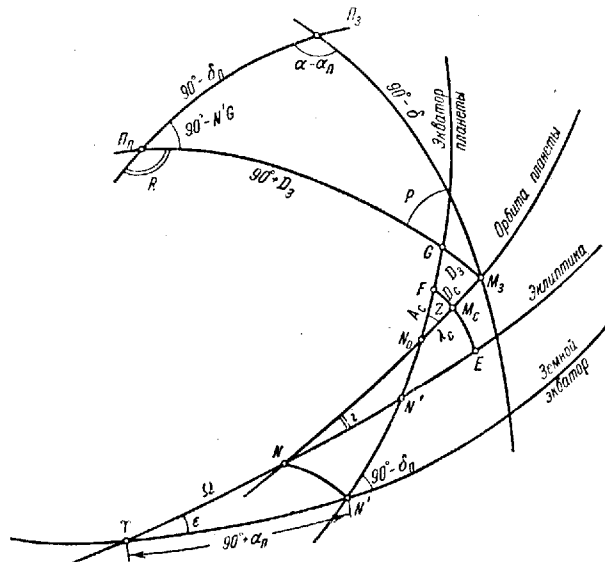


Рис. 35. Точный расчет физических координат.

на эклиптике. Дуга $N\gamma = \Omega$ представляет собою долготу восходящего узла орбиты, а угол $M_3NE = i$ — наклон последней к эклиптике. Пусть дуга $N'G$ представляет собою экватор планеты, так что точки N', N'' и N_0 являются положениями нисходящего узла последнего соответственно на земном экваторе, эклиптике и орбите. Пусть Π_3 — полюс земного экватора, Π_{Π} — полюс экватора планеты, дуга $\Pi_{\Pi}\Pi_3$, очевидно, равна $90^\circ - \delta_{\Pi}$, в то время как прямое восхождение точки N' выражается дугой $N'\gamma = 90^\circ + \alpha_{\Pi}$. Для дальнейшего расчета необходимо получить следующие величины, медленно меняющиеся со временем: $\sphericalangle NN_0$, $\sphericalangle N'N_0$, $\sphericalangle NN_0N'$. Для этого сначала рассмотрим треугольник $N\gamma N'$, в котором $N\gamma = \Omega$, $N'\gamma = 90^\circ + \alpha_{\Pi}$, $\sphericalangle N\gamma N' = \varepsilon$, что позволяет найти сторону NN' и углы $N'N\gamma$ и $NN'\gamma$.

Далее:

$$\sphericalangle N_0NN' = 180^\circ - \sphericalangle N'N\gamma + i;$$

$$\sphericalangle NN'N_0 = 90^\circ - \sphericalangle NN'\gamma + \delta_{\Pi}.$$

Точка N' должна лежать на истинном экваторе, и потому при расчете дуги $N'N_0$ надо принимать во внимание нутацию, изменяющую дугу $N'N''$. Применяя дифференциальные формулы к треугольнику $N''\gamma N'$, получим:

$$\Delta N'N'' = \Delta \phi \cos(90^\circ + \alpha_{\Pi}) \sin \varepsilon \sec \delta_{\Pi} + \Delta \varepsilon \sin(90^\circ + \alpha_{\Pi}) \sec \delta_{\Pi}, \quad (65)$$

где $\Delta \phi$ — нутация в долготу и $\Delta \varepsilon = -B$ — нутация наклона, причем величина $\Delta N'N''$ заключена в пределах $\pm 0''.004$. Введем обозначение:

$$X = 90^\circ - N'N_0 \quad (66)$$

и ограничиваясь точностью до $0''.001$, можно составить таблицу этой медленно меняющейся величины на моменты начала каждого фиктивного года.

Пусть точка M_3 представляет собою геоцентрическую проекцию планеты на небесной сфере. Рассматриваем сферический треугольник $\Pi_3M_3\Pi_{\Pi}$. Его стороны будут: $\Pi_3\Pi_{\Pi} = 90^\circ - \delta_{\Pi}$, $M_3\Pi_{\Pi} = 90^\circ + D_3$ (ибо $\Pi_{\Pi}G = 90^\circ$ и $GM_3 = D_3$), $M_3\Pi_3 = 90^\circ - \delta$. Угол $\Pi_3M_3\Pi_{\Pi}$ при точке M_3 есть искомый позиционный угол P оси планеты, угол $M_3\Pi_3\Pi_{\Pi}$ равен $\alpha - \alpha_{\Pi}$, а угол $\Pi_3\Pi_{\Pi}M_3$ составляет $90^\circ - N'G$. Вводим обозначение: $R = 180^\circ - \sphericalangle \Pi_3\Pi_{\Pi}M_3$ и решаем треугольник $\Pi_3M_3\Pi_{\Pi}$; мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sin D_3 &= -\sin \delta \sin \delta_{\Pi} - \cos \delta \cos \delta_{\Pi} \cos(\alpha - \alpha_{\Pi}); \\ \cos D_3 \cos R &= -\sin \delta \cos \delta_{\Pi} + \cos \delta \sin \delta_{\Pi} \cos(\alpha - \alpha_{\Pi}); \\ \cos D_3 \sin R &= \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_{\Pi}), \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

что позволяет найти D_3 и R . Для получения P служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos D_3 \cos P &= \cos \delta \sin \delta_{\Pi} - \sin \delta \cos \delta_{\Pi} \cos(\alpha - \alpha_{\Pi}); \\ \cos D_3 \sin P &= -\cos \delta_{\Pi} \sin(\alpha - \alpha_{\Pi}). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Геоцентрическая долгота планеты M_3N_0 , отсчитанная в плоскости ее экватора от точки осеннего равноденствия N_0 , равна планетографическому прямому восхождению Земли A_3 , отсчитанному в той же плоскости, но от точки весеннего равноденствия планеты. Из этого следует:

$$\begin{aligned} A_3 + 180^\circ &= N'G + N'N_0 + 180^\circ = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - N'G) + (90^\circ - N'N_0) = R + X. \end{aligned} \quad (69)$$

Этим задача получения планетографических координат центра диска полностью решена.

Пусть точка M_c представляет собой гелиоцентрическую проекцию планеты на небесной сфере. Строим перпендикулярную к эклиптике дугу FM_cE . Планетоцентрическая долгота Солнца λ_c , отсчитываемая в плоскости орбиты планеты от точки весеннего равноденствия планеты, равна дуге NN_0 . Дуга NM_c может быть выражена через дугу $NE = \gamma E - \gamma N = l - \varpi$, где l — геоцентрическая долгота планеты, что дает:

$$\operatorname{tg} NM_c = \operatorname{tg} (l - \varpi) \sec i. \quad (70)$$

Полученное по этой формуле значение NM_c требует введения поправки за абберационное время, которая равна суточному гелиоцентрическому движению планеты по долготе, умноженному на выраженный в сутках промежуток времени, в течение которого свет проходит путь Солнце — планета — Земля. Медленно меняющаяся величина

$$Y = NN_0 + \text{поправка абберации}$$

подобно параметру X табулируется с годичным интервалом. Окончательно λ получается как разность $\sim NM_c - Y$.

Планетографические координаты подсолнечной точки A_c и D_c получаются из прямоугольного треугольника FM_cN_0 . Острый угол $FN_0M_c = \angle NN_0N'$ обозначается через Z и, будучи медленно меняющейся величиной, табулируется через годичный интервал. Расчет нужных величин осуществляется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A_c &= \operatorname{tg} \lambda \cos Z; \\ \sin D_c &= \sin \lambda \sin Z. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Для вычисления долготы центрального меридиана L используется равенство

$$L = V - A_c - \mu \Delta_{\text{эл}}, \quad (72)$$

где V — планетоцентрический часовой угол точки восходящего узла экватора планеты на орбите для нулевого меридиана, вычисляемый по общей формуле:

$$V = V_0 + \xi (t - t_0), \quad (73)$$

в которой V_0 — значение этого угла для начальной эпохи t_0 , а член $\mu \Delta_{\text{эл}}$ выражает поправку за абберационное время, причем $\mu = \xi/v$, где v — скорость света, выраженная в астрономических единицах в сутки. Моменты t и t_0 удобно выражать в системе юлианских дней.

§ 15. Техника измерения планетных дисков

Определение линейных размеров планеты основано на применении простого соотношения между линейным радиусом R , угловым радиусом δ и геоцентрическим расстоянием Δ , которое выражается формулой (2) на стр. 105. Последнюю здесь мы перепишем в таком виде:

$$R = \Delta \sin \delta, \quad (74)$$

или, поскольку δ всегда мало,

$$R = \Delta \cdot \delta'' \sin 1''. \quad (75)$$

Расстояние Δ получается из данных небесной механики с весьма высокой точностью. Остается измерить угловой полудиаметр δ , что представляет собою отнюдь не простую задачу. Затруднения тут возникают из-за большого количества систематических погрешностей, важнейшими из которых являются следующие:

- 1) размытость или нерезкость края диска планеты, вызванная дифракцией, абберациями и неточной фокусировкой;
- 2) волнение края, происходящее от неспокойствия земной атмосферы;
- 3) «ошибка соприкосновения», сопровождающая наведение нитей микрометра или аналогичного прибора на край планеты;
- 4) иррадиация, приводящая к преувеличению измеренного диаметра.

Для измерения диаметров дисков планет и спутников применяются весьма различные приборы и методы. Важнейшие из них таковы:

1. Метод прохождений. Меридианные наблюдения больших планет и Луны, ведущиеся на пассажных инструментах и меридианных кругах, сводятся к регистрации моментов прохождения через нити западного и восточного краев видимого диска светила. Разность S отмеченных моментов легко дает диаметр диска 2δ , по направлению совпадающий с суточной параллелью:

$$2\delta'' = 15 S^s \cos D, \quad (76)$$

где D — склонение планеты. Аналогичные наблюдения можно вести и на экваториале с тем преимуществом, что отпадают ограничения во времени, связанные с наблюдениями в меридиане. Однако и тут остается необходимость измерять только один диаметр, что значительно снижает ценность этого метода.

Было бы желательно применить к таким наблюдениям фотоэлектрический метод наблюдений прохождений, разработанный и успешно внедренный в практику астрометрических работ Н. Н. Павловым.

2. **Н и т я н ы й м и к р о м е т р.** Этот прибор применялся к измерению угловых диаметров дисков очень широко. Простейшая схема такого измерения состоит в том, что подвижная нить устанавливается касательно сначала к одному краю диска, а потом — к противоположному (рис. 36, а). Разность отсчетов на барабане микрометрического винта, соответствующая таким положениям нити, после умножения на цену оборота дает диаметр, выраженный в угловой мере. Недостаток такого приема состоит в том, что всякого рода перемещения изображения планеты в поле зрения (например, из-за неточного хода часового механизма, вибраций

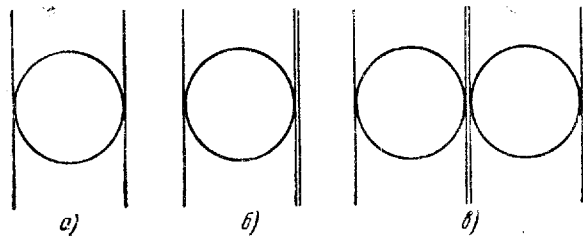


Рис. 36. Схема измерения углового диаметра диска микрометром. Неподвижная нить условно изображена двойной линией.

инструмента, волнения воздуха и др.) входят в результат измерения как ошибки. Поэтому предпочитают пользоваться неподвижной нитью, причем один край диска движением всего телескопа устанавливается касательно к последней, в то время как подвижная нить устанавливается на противоположный край (рис. 36, б). Другой вариант состоит в том, что сначала на неподвижной нити устанавливается один (скажем, правый) край, а подвижная нить наводится на левый; затем к неподвижной нити подводится левый край, а на правый край наводится подвижная нить. Очевидно, что перемещение последней соответствует удвоенному диаметру диска (рис. 36, в). Есть основания предполагать, что при таком порядке измерений некоторые погрешности исключаются.

Микрометр удобен тем, что позволяет измерять диаметр диска в любом позиционном угле. В частности, для Юпитера и Сатурна можно устанавливать нити по главным диаметрам эллипса диска и определять полярный и экваториальный диаметры диска.

Установка нити прибора на видимый край диска связана с некоторой неопределенностью. Дело в том, что при сильном увеличении нить имеет заметную толщину, представляясь в виде прозрачного цилиндра, у краев изображения которого может возникнуть сложная дифракционная картина. При измерении очень малых дисков видимая ширина нити оказывается того же порядка, что и измеряемый объект, причем края последнего находятся

в непрерывном движении из-за волнения воздуха. Каждый наблюдатель сам вырабатывает технику наведений в таких условиях. В одних случаях ставят край диска касательно к внутреннему краю нити (рис. 37, а), в других — к внешнему (рис. 37, б); в обоих случаях в результате измерения должна вводиться поправка за полуширину нити, получение которой далеко не просто. Некоторые находят удобным устанавливать на мысленно намеченную середину нити (рис. 37, в), другие — поочередно делать установки на внутренний и внешний край, предполагая, что среднее из таких установок соответствует наведению на середину нити. Пользовались также и двойной нитью (рис. 37, г), но поскольку симметрии в расположении изображения тут нет, это особенного улучшения не давало.

Результатом указанных затруднений является то, что «ошибка прикосновения» в микрометрических наблюдениях велика; она зависит от условий наблюдения и направления движения нити, различна у разных наблюдателей, а у одного и того же лица меняется со временем, как это видно на примере многолетней серии измерений Юпитера в Потсдаме (наблюдатель Лозе), которая дала монотонное увеличение получаемого диаметра, за 18 лет составившее $0'',75$. Все это породило тенденцию отказаться от применения нитяного микрометра в деле измерения планетных дисков и искать здесь других путей.

3. **Г е л и о м е т р.** Как известно, этот прибор, будучи предназначен специально для измерения угловых поперечников протяженных небесных объектов, имеет то преимущество, что наведение нитью в нем заменено установкой на касание двух изображений самого объекта (рис. 37, д). Это значительно снижает ошибку прикосновения, полностью устраняет погрешности, связанные с перемещениями самого телескопа (вибрации, ход механизма), и несколько уменьшает воздействие атмосферного волнения. Принято считать, что благодаря этому гелиометрические наблюдения планет точнее микрометрических, почему при составлении сводок им обычно приписывают больший вес.

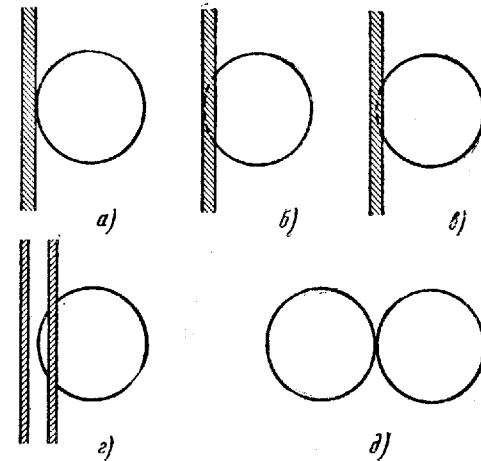


Рис. 37. Техника наведения нити микрометра на край диска.

Существенным недостатком является то, что благодаря техническим трудностям, связанным с изготовлением разрезанного по диаметру объектива, гелиометры, существующие в настоящее время, имеют отверстие объектива не более 200 мм, вследствие чего обладают лишь ограниченной разрешающей силой.

4. **Микрометр двойного изображения.** В этом приборе принцип приведения к соприкосновению двух изображений объекта реализуется технически при помощи оптического приспособления, расположенного в окулярном узле телескопа. Например, используется устройство, основанное на применении поляризационной призмы с двойным лучепреломлением. Это дает то огромное преимущество, что позволяет устанавливать прибор на любом телескопе и, следовательно, вести наблюдения на больших рефракторах и рефлекторах, т. е. в условиях высокой разрешающей силы. Поэтому измерение наиболее малых по угловым размерам объектов, как, например, астероидов и спутников, чаще всего осуществляется именно с микрометром такого типа. Этот метод дает предельную точность, достигаемую при современном состоянии техники.

5. **Интерферометр.** Известный принцип звездного интерферометра, используемый для измерений очень тесных двойных звезд и угловых поперечников звездных дисков, дает очень хорошие результаты и в отношении малых тел солнечной системы. Опыты по измерению диаметров малых планет и спутников дали точность, превосходящую даже то, что получается с микрометром двойного изображения. Однако сложность работы с интерферометром и ограниченное распространение этого прибора явились причиной того, что наблюдения такого рода выполняются редко.

6. **Фотография.** Измерение изображений планет на фотографических снимках—негативах или позитивах—не составляет затруднений и могло бы применяться в широких размерах. Однако точность, которую оно дает, крайне низка. Причина заключается, во-первых, в нерезкости и размытости края изображения планеты на фотографическом снимке, а во-вторых, в действии фотографической иррадиации (§ 10). Благодаря этим двум факторам величина измеренного диаметра монотонно растет с продолжительностью выдержки, что делает результат измерения неопределенным. Авторы работ, в которых делается фотографическое определение диаметра, нередко выбирают некоторое значение выдержки, при котором эффект иррадиации принимается минимальным, однако критерии, используемые для такого выбора, недостоверны. В частности, не оправдал себя предложенный Россом и другими прием, состоящий в измерении ряда изображений, полученных при различной продолжительности выдержки, построение кривой зависимости измеренного диаметра от выдержки

и нахождении на этой кривой точки излома или перегиба, которая по мысли авторов подобных методов должна указывать положение истинного края изображения. На практике ни излома ни перегиба не получается, что теоретически было объяснено В. В. Шароновым.

В целях повышения точности фотографических измерений предлагалось заменить простое измерение изображения на негативе посредством микроскопа с микрометром более сложными приемами. Так, пробовали мерить сначала негатив, а потом позитив и брать среднее арифметическое из полученных результатов; помещать изображение диска концентрично в диафрагме несколько большего диаметра и вместо диаметра мерить расстояние между краями диафрагмы и изображения; пропускать снимки на саморегистрирующем микрофотометре и принимать за положения краев изображений определенные точки полученной регистрирующей. Однако все это к особым успехам пока не привело. Наглядной иллюстрацией трудностей, связанных с фотографическим измерением планетных дисков, является проблема так называемого Райт-эффекта на Марсе, до сих пор составляющая предмет дискуссии (см. § 61).

7. **Дисковый микрометр.** Этот прибор, построенный впервые Кампеллом в 40-х годах текущего столетия, предназначен специально для определения диаметров малых дисков. Он основан на глазомерном сравнении диска светила с диском искусственной планеты, видимой в поле зрения телескопа. «Искусственная планета» представляет собой изображение диафрагмы, получаемое при помощи оптической системы, состоящей из специального бокового объектива и установленной на оптической оси телескопа под углом 45° плоско-параллельной стеклянной пластинки (аналогичной используемым в визуальных звездных фотометрах). Диафрагма освещена при помощи расположенных за ней матового стекла и лампы накаливания. Система из трех поляризаторов и кварцевой пластинки служит для подгонки искусственной планеты по яркости и цвету к наблюдаемому светилу. Изменение угловых размеров в небольших пределах достигается изменением расстояния диафрагмы от объектива, в широких пределах—сменой диафрагмы.

Наблюдение состоит в том, что изображения светила и искусственной планеты располагаются в поле зрения телескопа рядом, выравниваются по яркости и цвету, после чего перемещением диафрагмы делается установки на точное равенство видимых размеров. Оказывается, что при положении светила справа и слева от искусственного изображения результат сравнения получается систематически различным, поэтому обязательно делаются сравнения в положениях как справа, так и слева и берется из них среднее арифметическое, которое считается свободным от систематической погрешности такого происхождения.

Основное преимущество дискового микрометра перед другими состоит в том, что относительная случайная погрешность измерения диаметра в нем мало зависит от размеров измеряемого изображения, и поэтому для очень маленьких дисков точность получается почти такой же, что и для крупных. Лабораторные опыты приводят к выводу, что случайная погрешность одного измерения при всяком размере диска составляет около $1/400$. При измерениях небесных тел точность значительно снижается за счет дрожания изображений, потемнения к краю диска, наличия пятен и других причин. Наблюдатели обсерватории Пик-дю-Миди оценивают реальную погрешность отдельного измерения диаметра планеты в $1/100$, однако опубликованные ими средние значения диаметров по отдельным вечерам наблюдений обнаруживают случайные расхождения в пределах 5—10%. Вопрос о систематических погрешностях, свойственных дисковому микрометру, пока не изучен.

Кроме перечисленных общих методов, к некоторым светилам могут применяться специальные методы определения диаметров. Так, диаметр Луны надежно получается из наблюдений контактов солнечных затмений и, особенно, из наблюдений покрытий звезд. Для Юпитера, а отчасти и для Сатурна могут быть применены аналогичные методы, основанные на наблюдении таких явлений, как покрытия, прохождения и затмения в системах спутников этих планет.

Каждый метод измерения диаметров характерен своими специфическими источниками систематических погрешностей. Определение и исключение из полученного результата таких погрешностей, и прежде всего иррадиации, являются для дела определения планетных диаметров одной из главных проблем. Для этой цели рекомендованы нижеследующие приемы:

1. **Выравнивание наблюдений**, выполненных при различных значениях геоцентрического расстояния планеты Δ . Пусть δ — измеренное значение углового диаметра планеты при расстоянии Δ , δ_1 — истинное значение углового диаметра планеты при $\Delta=1$, c — величина иррадиации. Тогда соотношение между этими величинами будет выражено равенством

$$\delta = \frac{\delta_1}{\Delta} + c. \quad (77)$$

Если считать, что иррадиация c является постоянной, то решение системы уравнений такого вида позволяет найти неизвестные c и δ_1 , из которых последнее и является конечным результатом всей работы.

На практике этот метод применим только к двум планетам: Венере и Марсу; для остальных пределы изменения Δ оказываются недостаточными. Кроме того, лежащее в основе метода предполо-

жение о неизменности c оправдывается лишь в пределах некоторого приближения. Это зависит, в частности, от того, что параллельно изменению Δ меняется также фаза планеты, а с нею — средняя яркость диска и расположение пятен на нем; оказывает влияние также изменение склонения планеты, поскольку им определяется зенитное расстояние, а следовательно, яркость и степень волнения изображения. К серьезным изменениям c приводит необходимость наблюдать планету не только ночью, но и днем. Все это заставляет применять метод вариации геоцентрических расстояний с известной осторожностью.

2. **Измерение искусственных дисков**. Нетрудно устроить имитирующее планету приспособление в виде прецизионной диафрагмы, расположенной перед ярко освещенной поверхностью и удаленной от телескопа на достаточно большое и точно известное расстояние. Измеряя изображение этой диафрагмы в условиях, возможно более близких к тому, что имеет место при наблюдении планеты, и сравнивая измеренное значение δ_n углового диаметра с вычисленным δ_v , мы получим величину систематической погрешности примененного для измерения метода:

$$c = \delta_n - \delta_v. \quad (78)$$

Недостаток такого приема состоит в том, что осуществить полное тождество условий не удастся, особенно в отношении влияния атмосферного волнения.

3. **Получение поправок расчетным путем**. В основу этого должны быть положены данные физиологической оптики. Соответствующая теория была разработана Кюлем на основе так называемой теории контрастов Маха—Зеелигера. Получилось, что положение видимого края диска, засекаемого при измерении, определяется сочетанием дифракционной картины, создаваемой у границы изображения планеты объективом телескопа (§ 6), с психофизиологическими особенностями зрения. При разных методах измерения замеряемое положение края соответствует разным значениям «контрастной функции». Несмотря на свой формальный характер, теория эта удовлетворительно объясняет многие факты, в том числе преуменьшение диаметра диска, получаемое при измерении по методу двойного изображения вместо ожидаемого преувеличения, вызванного иррадиацией. Количественное сопоставление данных теории со значениями поправок c , получаемых экспериментально, в некоторых случаях приводит к существенным разногласиям. Так, например, получилось для обширных серий гелиометрических наблюдений, проведенных на Энгельгардтовской обсерватории А. А. Нефедьевым. Тем не менее принято считать, что при отсутствии других возможностей введение поправок по методу Кюля улучшает полу-

чаемые из непосредственного измерения результаты. В качестве иллюстрации последнего приводим нижеследующий пример редукции измерений диаметра Венеры, выполненных Гартвигом с помощью гелиометра:

δ	δ_1 без по- правки	δ_1 с по- правкой
<12"	15",76	17",07
12—15"	16,32	17,30
15—20"	16,52	17,34
20—25"	16,95	17,57
25—30"	17,16	17,45
30—40"	17,23	17,46
40—50"	17,25	17,42
>50"	17,28	17,41

Мы видим, что ход с видимым диаметром после введения поправок почти исчез.

Поскольку погрешности измерений планетных диаметров велики, естественно, что в разных случаях для одной и той же планеты приводят или используют различные значения диаметра. В частности, в нашей справочной, учебной и научно-популярной литературе распространены три группы значений диаметров планет, выражаемых обычно либо в километрах, либо в долях диаметра земного шара. Первую из этих групп составляют данные, приведенные в известном руководстве по астрономии Рессела, Дэгана и Стюарта. Они представляют собою результаты отдельных рядов измерений, признанных наиболее достоверными еще при составлении известной сводки Рессела по альбедо планет (1916 г.); будучи выведены из наблюдений различными методами, сколь угодно однородной системы они не составляют. То же следует сказать и о второй группе значений, которые были отобраны в разное время для вычисления угловых полудиаметров планет, сообщаемых в астрономических ежегодниках в составе ежегодных эфемерид планет. Тут тоже использованы в основном одиночные ряды наблюдений, но не те, что у Рессела. Сводка этих чисел помещается в разделах объяснений к ежегодникам, например к Астрономическому Ежегоднику СССР.

Третью группу составляют значения, выведенные Рабе на основании критического пересмотра всего имеющегося материала. В тех случаях, когда наблюдения были выравнены самим наблюдателем по методу вариации геоцентрических расстояний, соответствующее значение включалось в сводку непосредственно. Там, где этого не было, в измерения вводились поправки, вычисленные по теории Кюля. Степень достоверности последней и определяет

ценность чисел Рабе, представляющих собою весовые средние значения по всем опубликованным рядам наблюдений. Несмотря на то, что положения работы Рабе в некоторых отношениях представляются спорными, она в настоящее время является единственной сводной работой по планетным диаметрам, где сделана попытка свести разнообразный материал в одну систему. Поэтому данные сводки Рабе следует признать наиболее достоверными.

Сопоставление трех названных групп значений диаметров дано в табл. 7. При их сравнении необходимо иметь в виду, что группы II и III для всех планет дают значение экваториального диаметра, в то время как числа Рессела (группа I) для планет с большим сжатием представляют собою средние значения радиуса $\bar{R}$, выражаемые равенством (84) (см. ниже).

Подробности, относящиеся к измерениям каждой планеты в отдельности, будут сообщены в соответствующих параграфах главы V, где даются и сводные таблицы выполненных разными наблюдателями измерений диаметров. Фигура планеты, принимаемая за сфероид, как было указано в § 13, определяется либо эксцентриситетом e эллипса меридиана, либо сжатием ϵ . Прямой способ определения последнего состоит в измерении посредством микromетра или гелиометра полудиаметров a и b эллипса видимого диска. Это дает видимое сжатие диска $\epsilon_2 = (a - b)/a$, из которого истинное сжатие ϵ получается по формуле (33) (стр. 117). Для малых дисков таких планет, как Уран и Нептун, подобный способ получения ϵ слишком неточен, и потому для них сжатие получается другим путем, а именно на основании анализа неравенств движения спутников, о чем подробнее будет сказано в следующем параграфе. Этот путь с успехом применяется и в отношении обладающих спутниками планет с крупными дисками: Марса, Юпитера и Сатурна.

Зная a и ϵ , легко вычислить площадь S поверхности планеты, что при очень малом ϵ выполняется по элементарной формуле

$$S = 4\pi a^2, \quad (79)$$

а при заметном ϵ — по формуле для поверхности сфероида:

$$S = 4\pi a^2 \left[1 - \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right], \quad (80)$$

или приближенно:

$$S = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon \right). \quad (81)$$

Объем V сферической планеты вычисляется по элементарной формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad (82)$$

Геометрические характеристики больших планет и Луны

Название планеты	Пределы изменений видимого углового поперечника	Экваториальный полудиаметр								Средний полудиаметр. сводка Ресселя	Сжа- тие ϵ	Площадь поверхно- сти S (Земля=1)	Объем V (Земля=1)
		Угловой		Линейный				Рабе					
		Принятый для эфемерид											
		$\Delta=1$ а. е.	при сред- нем противо- стоянии	Зем- ля=1	км	Зем- ля=1	км						
Меркурий . .	4", 7—12", 9	3", 34	5", 44	0,381	2 420	0,403	2 570	0,39	2 500	0	0,15	0,06	
Венера . . .	9, 9—64, 0	8, 41	30, 40	0,959	6 094	0,989	6 310	0,973	6 200	0	0,95	0,92	
Земля . . .	—	8, 80	—	1,000	6 378	1,000	—	1,000	6 371	1/296	1,00	1,00	
Марс	3, 5—25, 1	4, 68	8, 93	0,534	3 391	0,538	3 430	0,531	3 385	1/192	0,28	0,15	
Юпитер . . .	30, 5—49, 8	98, 47	23, 40	11, 22	71 360	11, 26	71 800	10, 95	69 780	1/15, 4	120	1312	
Сатурн . . .	14, 7—20, 5	83, 33	9, 75	9, 49	60 390	9, 45	60 300	9, 02	57 550	1/9, 5	81	734	
Уран	3, 4—4, 2	34, 28	1, 88	3, 91	24 800	4, 19	26 700	4, 00	25 500	1/14	16	64	
Нептун . . .	2, 2—2, 4	36, 56	1, 26	4, 16	26 500	3, 89	24 850	3, 92	25 000	1/40	15	60	
Луна	29', 24—33', 40	—	932, 58	—	—	—	—	0,273	1 738	0,0006	0,075	0,020	

а при наличии сжатия—по формуле для сфероида:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - \epsilon) = \frac{4}{3} \pi a^3 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (83)$$

При вычислении поверхностей и объемов планет на практике вместо формул (80) и (83) часто пользуются равенствами (79) и (82), заменяя в них a на среднее значение радиуса $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \frac{1}{3} (2a + b) = a \left(1 - \frac{1}{3} \epsilon \right). \quad (84)$$

Полученные таким путем значения S и V , основанные на числах сводки Ресселя и отнесенные к соответствующим данным для Земли как к единице, также приведены в табл. 7.

§ 16. Масса и определяемые ею величины

Основной физической характеристикой всякого небесного тела является его масса. Как известно, для определения масс планет существуют два метода.

Первый метод основан на применении третьего закона Кеплера к системе планета-спутник. Обозначим массу планеты $M_{\text{п}}$, массу спутника $M_{\text{сп}}$, большую полуось орбиты спутника $a_{\text{сп}}$ и период оборота $T_{\text{сп}}$. Тогда III закон Кеплера в обобщенной Ньютоном форме дает:

$$\frac{a_{\text{сп}}^3}{T_{\text{сп}}^2 (M_{\text{п}} + M_{\text{сп}})} = \frac{G}{4\pi^2}, \quad (85)$$

где G —постоянная тяготения.

Аналогичное выражение мы можем написать для системы Земля—Солнце. Обозначив массу Солнца $M_{\odot}$, массу Земли $M_{\oplus}$, большую полуось земной орбиты a_3 и звездный год T_3 , пишем:

$$\frac{a_3^3}{T_3^2 (M_{\odot} + M_{\oplus})} = \frac{G}{4\pi^2}. \quad (86)$$

Из равенств (85) и (86) легко получаем:

$$\frac{M_{\text{п}} + M_{\text{сп}}}{M_{\odot} + M_{\oplus}} = \frac{a_3^3}{a_{\text{сп}}^3} \frac{T_{\text{сп}}^2}{T_3^2} \approx \frac{M_{\text{п}}}{M_{\odot}}. \quad (87)$$

Массой спутника по сравнению с массой планеты и массой Земли по сравнению с массой Солнца можно пренебречь и считать, что написанное выражение равно отношению массы планеты к массе Солнца.

Практика применения этого метода связана с некоторыми затруднениями наблюдательного и теоретического характера. Во-первых, определение элементов орбиты спутника основывается на визуально-микрометрических или фотографических измерениях

положения спутника по отношению к диску планеты. Во многих случаях речь идет о весьма слабом объекте, условия видимости которого вблизи яркого светила крайне неблагоприятны, что порождает различного рода источники систематических погрешностей. Наглядным примером может служить открытый С. К. Костинским в Пулковке эффект «отталкивания» слабого фотографического изображения спутника от сильно передержанного интенсивного изображения планеты. Погрешность в видимых координатах спутника на небесной сфере окажет тем большее влияние на получаемое из наблюдений значение большой полуоси $a_{сп}$, чем больше геоцентрическое расстояние планеты. Правда, затруднения, связанные с измерениями положений спутников, можно обойти, если при определении элементов движения исходить из наблюдений таких явлений, как затмения спутников. Однако такие наблюдения регулярно могут выполняться только для спутников Юпитера. Кроме того, позволяя точно определить период оборота $T_{сп}$, они не дают большой полуоси $a_{сп}$.

Во-вторых, формула (87), совершенно точно выражающая соотношения в системах двух тел, на практике значительно осложняется теми возмущениями, которые вносятся в движение спутника притяжением Солнца, прочих планет, других спутников той же планеты и, наконец, экваториальным вздутием планеты. Известно, сколь сложна теория движения Луны. Но теория движения спутников в системах других планет в некоторых отношениях еще сложнее, поскольку добавляются взаимное притяжение спутников и эффект очень значительного сжатия самой планеты. Между тем значения $a_{сп}$ и $T_{сп}$, на основании которых выполняется вычисление массы, должны быть получены именно на основе применения такой теории.

Второй путь определения масс планет состоит в анализе тех возмущений, которые притяжение данной планеты вызывает в движении других планет. Как известно, масса возмущающей планеты входит как коэффициент в выражение пертурбационной функции. Поэтому при выполнении таких операций, как получение поправок к элементам орбит планет по разностям вычисленных и измеренных положений планеты, можно построить схему решения так, чтобы наряду с поправками элементов получались и значения масс возмущающих планет или же поправки к ранее известным значениям этих масс.

Такой путь получения масс требует обширных вычислительных работ. С принципиальной точки зрения он представляется менее надежным, поскольку масса выводится через небольшие разности координат и ее значение находится в зависимости от систематических погрешностей других величин, входящих в решение, но на практике он дает результаты, по степени достоверности во многих случаях не уступающие тому, что получается на основе

Название планеты	Масса (в долях массы Земли) по сведениям разных авторов				Средняя плотность		g/g_3	$v_{кр}$ км/сек	q	$\frac{a}{q}$
	Астроном. Восточ- ный СССР	Ньюкомб и Хилл	Де Сит- тер	Рессел	$\times 10^3$	g/cm^3				
Меркурий	0,047	0,055	0,044	0,04	0,70	3,8	0,27	3,6	0,000001	—
Венера	0,813	0,807	0,813	0,81	0,88	4,86	0,85	10,2	0,000004	—
Земля	1,000	1,000	1,000	1,000	1,00	5,52	1,00	11,2	0,00347	0,97
Марс	0,107	0,107	0,107	0,108	0,72	3,96	0,38	5,0	0,00462	1,14
Юпитер	315,2	314,4	313,5	316,94	0,242	1,34	2,64	60	0,0976	0,63
Сатурн	94,3	94,0	94,0	94,9	0,13	0,71	1,17	36	0,1925	0,54
Уран	14,4	14,4	14,4	14,66	0,23	1,27	0,92	21	0,0751	0,74
Нептун	17,1	17,0	16,8	17,16	0,29	1,58	1,12	23	0,0353	0,57

III закона Кеплера. Причина этого лежит в том, что наблюдательный материал по положениям больших планет количественно гораздо обильнее и качественно выше, чем по спутникам, а также еще и в том, что теория движения больших планет по полноте разработки намного превосходит теорию движения спутников. Необходимо также иметь в виду, что для планет, лишенных спутников, метод возмущений является единственным способом определения массы.

Таким образом, для получения наиболее достоверных значений масс больших планет надлежит использовать оба метода определения масс, объединяя даваемые ими результаты и учитывая их веса. Такая работа выполнялась неоднократно. В табл. 8 мы приводим значения масс по данным сводок, составленных несколькими авторами. В оригинале массы выражены в долях массы Солнца, что удобно с точки зрения задач небесной механики. Здесь мы приводим эти массы пересчитанными на массу Земли, которая нами принята равной $1/331950$ массы Солнца.

Мы видим, что в настоящее время массы известны с удовлетворительной точностью, поскольку расхождения между числами отдельных сводок не превышают 1% от их значений. Исключение составляет Меркурий, масса которого в настоящее время известна с точностью, не превосходящей 25%. Это объясняется тем, что эту массу можно определять только по методу возмущений, а возмущения, вызываемые притяжением Меркурия в движении Венеры и Земли, слишком малы для уверенного получения массы.

Для малых тел солнечной системы—астероидов и спутников—определять массы удается лишь в редких случаях. Так, в системах

Таблица 9

Данные о массах некоторых спутников
Юпитера и Сатурна

Название спутника	Масса	
	в долях массы соответствующей планеты	в долях массы Луны
Ио	0,000042	1,09
Европа	0,000025	0,65
Ганимед	0,000081	2,10
Каллисто	0,000022	0,58
Мимас	$1/16340000$	$1/2120$
Энцелад	$1/4000000$	$1/520$
Тетис	$1/921500$	$1/119$
Рея	$1/563000$	$1/69$
Титан	$1/4150$	$1/86$

спутников Юпитера и Сатурна можно делать некоторые суждения о массах, основываясь на получаемых из наблюдений взаимных возмущениях. Соответствующий материал, который представляет собою скорее оценки, чем настоящие определения, сведен в табл. 9.

Масса Луны определена надежно по тем неравенствам, которые создает в видимом движении Солнца и планет обращение центра Земли вокруг центра тяжести системы Земля—Луна. Сводка важнейших определений дана в табл. 10.

Таблица 10

Сводка определений массы Луны

Автор	Наблюдательный материал	$\frac{M_3}{M_1}$
Ньюкомб .	Долготы Солнца и планет	81,48
Ньюкомб .	Постоянные прецессии и нутации	81,62
Хилл . . .	Наблюдения малых планет	81,76
Хинке . . .	Наблюдения Эроса	81,53
Браун . . .	Наблюдения Эроса 1930—1931 гг.	81,27

Для спутников малой массы и для всех астероидов возможны только гипотетические оценки масс, основанные на фотометрических данных. Именно, предположив, что объект представляет собою шар, и задавшись тем или иным значением геометрического альbedo, можно по видимому блеску и расстояниям получить радиус шара (соответствующие формулы даны в § 37), по радиусу найти объем, а приняв предположительно некоторое значение средней плотности,—и массу.

Зная массу M и объем V , легко вычислить среднюю плотность $\bar{\rho}$:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V}. \quad (88)$$

При этом обычно пользуются средним значением радиуса планеты $\bar{R}$, выражаемым формулой (84) и отнесенным к среднему радиусу Земли как единице, а также массой, выраженной в долях земной массы. Принимая для средней плотности Земли значение $\bar{\rho} = 5,52 \text{ г/см}^3$, для вычисления средней плотности $\bar{\rho}$ планеты получаем выражение

$$\bar{\rho} = 5,52 \frac{M}{R^3} \text{ г/см}^3. \quad (89)$$

Соответствующие значения $\bar{\rho}$, выраженные в системе Рессела, приведены в табл. 8 (стр. 143).

Из других величин, связанных с массой, большой интерес с точки зрения природы планет представляет ускорение силы тяжести g . Относя по-прежнему все характеристики планеты к данным для земного шара и вспоминая, что у земной поверхности значение g , освобожденное от эффекта центробежного ускорения, составляет $981,993 \text{ см/сек}^2$, мы получим для расчета g такую формулу:

$$g = 982 \frac{M}{R^2}. \quad (90)$$

Рассчитанное таким образом g будет представлять собою лишь среднее значение и притом без учета эффекта вращения планеты, который в некоторых случаях может быть значительным. Истинное распределение ускорения силы тяжести по поверхности небесного тела выражается известной формулой Клеро:

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (91)$$

где g_0 — ускорение силы тяжести на экваторе, которое может быть найдено на основании нижеследующих соображений. Если масса планеты, выраженная в абсолютных единицах, равна M , а экваториальный радиус сфероида R_0 , то ускорение, определяемое притяжением, будет GM/R_0^2 . При угловой скорости вращения ω центробежное ускорение составляет $\omega^2 R_0$; поэтому

$$g_0 = G \frac{M}{R_0^2} - \omega^2 R_0. \quad (92)$$

Что касается коэффициента β , то он представляет собою относительное изменение ускорения силы тяжести при переходе от экватора к полюсу. Обозначив значение g для последнего через g_{90} , имеем:

$$\beta = \frac{g_{90} - g_0}{g_0}. \quad (93)$$

Введем величину q отношения центробежного ускорения на экваторе планеты к имеющему там место ускорению силы тяжести:

$$q = \frac{\omega^2 R_0}{G \frac{M}{R_0^2} - \omega^2 R_0}. \quad (94)$$

Ограничиваясь приближением, верным до второго порядка относительно q , можем положить: $g_0 = g$ [формула (91)], $R_0 = \bar{R}$, и выразить массу M через среднюю плотность $\bar{\kappa}$:

$$M = \frac{4}{3} \pi \bar{R}^3 \bar{\kappa}. \quad (95)$$

Тогда формула (94) принимает вид:

$$q = \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{G \bar{\kappa}} = \frac{3\pi}{G \bar{\kappa} P^2}, \quad (96)$$

где P — период оборота планеты вокруг оси. В своих классических трудах по фигурам равновесия небесных тел Клеро показал, что коэффициент β связан с параметром q и сжатием планеты ε соотношением

$$\beta = \frac{5}{2} q - \varepsilon. \quad (97)$$

В случае Земли это даст возможность определить сжатие ε из гравиметрических наблюдений, которые легко позволяют получить β . Для других планет равенство (97) позволяет по известному ε получать β и, далее, распределение силы тяжести по поверхности планеты по формуле (92).

Для исследования природы планет имеет значение также критическая скорость, или скорость убегания v_k . Так называется значение скорости, при котором движение тела у поверхности планеты является параболическими, так что это тело навсегда покидает планету. При $v > v_k$ траектория тела будет гиперболой; при $v < v_k$ — эллипсом, и потому тело, двигаясь по замкнутой орбите, возвратится к поверхности планеты. Скорость v_k в первом приближении выражается формулой:

$$v_k = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2gR}. \quad (98)$$

Вычисленные по этой формуле значения v_k приведены в табл. 8. Взаимодействие силы притяжения и центробежной силы определяется фигура внешней поверхности небесного тела, а также форма уровенных поверхностей внутри тела. Последние представляют собою геометрическое место точек, для которых потенциал силы тяжести одинаков; одинаковыми на таких поверхностях будут также давление и плотность κ вещества. Теория фигуры вращающегося небесного тела представляет собою одну из классических проблем небесной механики. Она была поставлена Ньютоном в XVII в.

Поскольку силы сцепления твердого вещества, из которого состоят по крайней мере внешние слои планет земной группы, малы по сравнению с силой тяжести, всякую планету можно считать находящейся в состоянии гидродинамического равновесия. Поэтому и вопрос о фигуре планеты решается путем исследования равновесия модели, состоящей из вязкой жидкости, частицы которой не смещаются одна относительно другой. Такое равновесие называется относительным.

Решение задачи о форме свободной вращающейся жидкой массы в общем виде наталкивается на громадные затруднения. Поэтому приходится ограничиваться решением частных упрощенных схем, над чем после Ньютона работали Маклорен, Ропш, Лежандр, Лаплас, Пуанкаре и особенно А. М. Ляпунов.

Нас здесь интересует частный случай фигур равновесия, которые соответствуют фигурам планет. Этот случай характерен малой величиной угловой скорости ω , которая даже для экватора Юпитера составляет только $0,000178 \text{ рад/сек}$, что позволяет при расчетах пренебрегать степенями ω выше второй. Соответствующие фигуры равновесия представляют собою эллипсоиды, полученные вращением эллипса вокруг малой оси и лишь немного отличающиеся от сферы. Такого типа фигуру принято называть *сфероидом*, а ее форму характеризовать величиной сжатия меридиана:

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a}.$$

Очевидно, что сжатие должно возрастать с угловой скоростью. Определяющим фактором тут является введенная выше величина q — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести. Вместе с тем сжатие будет зависеть от распределения массы внутри тела.

Простейший случай представляет однородная несжимаемая жидкость, у которой плотность ρ одинакова во всех точках тела. Этот случай математически исследован весьма подробно. Уже Ньютон доказал в 1686 г., что для сфероида, состоящего из такой жидкости, между ε и q имеет место соотношение

$$\varepsilon = \frac{5}{4} q. \quad (99)$$

Примерно в то же время, а именно в 1690 г., Гюйгенс решил ту же задачу для схемы, до некоторой степени противоположной. Он принял, что плотность вещества тела равна нулю, а вся масса сосредоточена в центре тела. Оказалось, что такой схеме соответствует решение

$$\varepsilon = \frac{1}{2} q. \quad (100)$$

Схема Ньютона и схема Гюйгенса одинаково неприменимы к реально существующим планетам. Дело в том, что всякое вещество обладает сжимаемостью и потому его плотность увеличивается с давлением. Но внутри всякого небесного тела давление возрастает к центру, так как на глубже расположенные слои давит вес вышележащих слоев. Поэтому даже для планеты, однородной по своему химическому составу, плотность равномерной быть не может: она должна возрастать к центру сфероида. К этому

должно добавляться расслоение вещества, в результате которого более тяжелые материалы могли скопиться в центральных частях планеты. Так, широким признанием пользуется гипотеза, согласно которой в центральных частях планет земной группы находится железное ядро.

Из сказанного вытекает, что реальное строение планеты должно быть промежуточным между схемами Ньютона и Гюйгенса. Исследование соответствующих ему условий равновесия составляет проблему фигуры вращающейся сжимаемой жидкости, которая была поставлена и в первом приближении решена французским ученым Клеро в XVIII в. и потому известна под названием «проблемы Клеро».

Клеро показал, что при достаточно малой угловой скорости вращения ω , а именно, когда можно ограничиваться членами порядка ω^2 , фигурой равновесия неоднородной вращающейся жидкости тоже является сфероид. Уровенные поверхности внутри этого сфероида также представляют собою сфероиды, причем сжатие этих сфероидов убывает от поверхности к центру. Таким образом, наибольшим сжатием обладает уровенная поверхность, соответствующая внешней поверхности тела. Для нее оказывается справедливым нижеследующее неравенство:

$$\frac{1}{2} q \leq \varepsilon \leq \frac{5}{4} q. \quad (101)$$

Таким образом, равенства (99) и (100) представляют собою предельные случаи, между которыми лежит действительное сжатие реально существующей планеты. Параметр ε/q характеризует степень концентрации массы к центру сфероида: чем он выше, тем в большей мере масса сосредоточена в центральных частях небесного тела. Это позволяет делать некоторые вполне объективные суждения о внутреннем строении планет. В табл. 8 приведены относящиеся сюда данные. Мы видим, что для Марса $\varepsilon/q = 1,14$, что не очень далеко от предельного значения 1,25; поэтому внутреннее строение этой планеты приближается к однородному. Напротив, для планет юпитеровой группы значения ε/q меньше единицы, что указывает на значительную концентрацию вещества к центру.

Дальнейшее изучение проблемы внутреннего строения планет и спутников в настоящее время находится в стадии спекулятивных гипотез. Затруднение тут состоит, в частности, в том, что мы пока не располагаем конкретными данными об изменении плотности различных материалов при тех высоких давлениях, которые должны иметь место внутри планеты. В общем, задача внутреннего строения планет может быть представлена как система уравнений, в которой число неизвестных превышает число уравнений. Поэтому небольшому количеству исходных данных можно удовлетво-

рять весьма различными, произвольно составленными схемами внутреннего строения. Изложение таких схем выходит из рамок этой книги.

Большое значение для исследования планет имеют некоторые явления, относящиеся к области небесной механики и связанные со сжатием сфероида планеты. Сюда прежде всего относятся те динамические взаимодействия между спутниками и экваториальным вздутием сфероида, которые порождают прецессионное движение оси вращения планеты, с одной стороны, и ряд специфических неравенств в движении спутника,—с другой.

Явление прецессии, открытое для Земли еще Гиппархом во II в. до н. э., должно иметь место для всякого небесного тела, вращающегося вокруг оси и находящегося в гравитационном поле других небесных тел. Обнаружить его для некоторой планеты из наблюдательного материала в настоящее время не представляется возможным, поскольку точность определения элементов планетного экватора по видимому перемещению деталей диска недостаточна, а промежуток времени, в течение которого такие определения производятся, слишком короток. Зато можно воспользоваться хорошо разработанной теорией прецессии. Если вокруг планеты по круговой орбите с радиусом $a_{\text{сп}}$ обращается спутник с массой M , то это вызовет прецессионное движение оси планеты, годовая величина p которого в первом приближении выражается равенством

$$p = \frac{3GHM}{2\omega a_{\text{сп}}^3} \cos i, \quad (102)$$

где i —наклон орбиты спутника к экватору планеты, ω —угловая скорость вращения последней, а H —динамическое сжатие планеты, равное отношению разности моментов инерции C и A относительно полярного и экваториального полудиаметров к первому из них:

$$H = \frac{C - A}{C}.$$

При наличии нескольких спутников вызываемые каждым из них прецессионные движения $p_1, p_2, \dots, p_3$ складываются. При всех условиях прецессию будет вызывать притяжение Солнца; величина $p_{\odot}$ такой прецессии (также в первом приближении) выражается формулой типа (102), куда надлежит подставить в качестве M —массу Солнца, a —большую полуось планетной орбиты, а i —наклон экватора планеты к плоскости ее орбиты. Таким образом, полная прецессия выражается равенством

$$p = p_{\odot} + p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad (103)$$

которое и позволяет оценить величину прецессии для данной пла-

неты в той мере, в которой могут считаться известными массы спутников и параметр H .

Притяжение экваториального вздутия планеты вызывает в движении самого спутника два вековых неравенства. Во-первых, для спутника с прямым движением линия апсид (т. е. диаметр небесной сферы, параллельный большой оси эллипса орбиты) вращается в сторону прямого движения; во-вторых, линия узлов (диаметр сферы, параллельный линии пересечения плоскости орбиты спутника с плоскостью экватора планеты) вращается в обратном направлении. Оба обращения происходят с одинаковым периодом P , который равен

$$P = \frac{a_{\text{сп}}^2 T_{\text{сп}}}{R_{\odot}^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{2} q \right)}. \quad (104)$$

Период этот может быть получен из регулярных наблюдений спутников, выполняемых в течение достаточно продолжительного времени. Это позволяет для нахождения сжатия планеты воспользоваться формулой (104). Такой путь получения ε принципиально отличен от прямого микрометрического измерения этой величины. Поскольку последнее сильно отягощается систематическими погрешностями, перечисленными в § 15, определения сжатия, основанные на неравенствах движения спутников, как правило, представляются более надежными (правда, только в тех случаях, когда параметр q известен с достаточной точностью). Известный пример значительного расхождения представляет Марс, для сжатия которого микрометрические измерения дают значение $1/_{90} - 1/_{100}$, в то время как теоретическое значение, полученное Струве по неравенствам движения спутников, составляет $1/_{190}$. Напротив, в случае Юпитера значение сжатия, найденное небесномеханическим путем, данным прямых измерений не противоречит.

Очень важно, что в точные формулы неравенств входят величины, определяемые взаимным положением плоскостей экватора планеты и орбиты спутника. Это позволяет на основании надлежащих расчетов получить по известным неравенствам движения спутника положение плоскости экватора планеты по отношению к плоскости орбиты спутника, а поскольку элементы последней известны, то и вывести элементы экватора i, Ω по отношению к плоскости планетной орбиты или к эклиптике.

Такой косвенный метод определения элементов вращения настолько надежен, что даже для таких планет, как Юпитер и Сатурн, у которых поверхность достаточно богата деталями для прямых наблюдений вращения, он дает более достоверные результаты, чем то, что получается по видимому движению пятен. Для Урана и Нептуна, диски которых лишены деталей, положение экватора получается только по возмущениям спутников.

Литература к главе III

§ 12—14

- Астрономический Ежегодник СССР на 1960 г., объяснение, §§ 20—24, изд. АН СССР, 1957, стр. 618—627.
 Вильев М. А., Теория физических наблюдений светил, Изв. Русск. астрон. О-ва 21, № 7, 167—206, 1915.
 Савич А., Теоретическая астрономия, т. 2, гл. 9, 1884.
 Bessel F., Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe. Astron. Untersuchungen 1, 324—345; Astron. Nachr. 12, № 277, 201—214; № 278, 217—236, 1835.

§ 15

- Блажко С. Н., Курс практической астрономии, Гостехиздат, 3-е изд., 1951, гл. XXI.
 Samichel H., Nouvelle methode de mesure des diamètres des petits astres et ses resultats, Annales d'Astrophys. 16, № 1, 41—46, 1953.
 Babel W., Untersuchungen über die Durchmesser der grossen Planeten, Astron. Nachr. 234, № 5600—5601, 153—200.

§ 16

- Аппель П., Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, ОНТИ, 1936.
 Баев К. Л., Определение фигуры Земли из лунного неравенства. Астрон. журн. 10, № 4, 443—450, 1933.
 Заморев А. А., Об определении формы планет по движению спутников, Астрон. журн. 14, № 4, 364—369, 1937.
 Идельсон Н. И., Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии. Астрон. ежегодник на 1942 г., Изд. АН СССР, 1941.
 Клеро А., Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики, Изд. АН СССР, 1947.
 Розырев Н. А., Выступление на I совещании по вопросам космогонии. В сб.: Труды I совещания по вопросам космогонии, Изд. АН СССР, 1951, 118—125.
 Куликов К. А., Фундаментальные постоянные астрономии, Гостехиздат, 1956, гл. II, VIII—X.
 Левиц Б. Ю., О внутреннем строении планет земной группы, Докл. АН СССР 55, № 6, 489—492, 1947.
 Ляпунов А. М., Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости, 1884.
 Ляпунов А. М., О форме небесных тел. Избранные труды, Изд. АН СССР, 1948.
 Ляпунов А. М., Общая задача устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
 Львов Н., О фигуре и внутреннем строении четырех внешних больших планет, Астрон. журн. 9, № 1—2, 68—76, 1932; № 2, 141—154, 1933.
 Марковский Д. Ф., Приближенные эллипсоидальные фигуры равновесия вращающейся жидкости и их приложения к гравиметрии, Астрон. журн. 10, № 1, 51—82, 1933.
 Масевич А. Г., Выступление на I совещании по вопросам космогонии. В сб.: Труды I совещания по вопросам космогонии, Изд. АН СССР, 1951, 107—117.

- Михайлов А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, ОНТИ, 1939.
 Михальский Н., Сжатие Юпитера в связи с вихревым движением периелия V спутника, Астрон. журн. 6, № 3—4, 272—278, 1929.
 Михальский Н., К вопросу об определении масс Юпитера и Сатурна. Астрон. журн. 9, № 1—2, 57—67, 1932.
 Михальский Н., Определение массы Юпитера и массы Сатурна по движению астероида Нестора, Астрон. журн. 10, № 4, 434—442, 1933.
 Михальский Н., Возмущения вращательного движения Земли большими планетами, Астрон. журн. 15, № 1, 35—48, 1938.
 Ницетти П., Основы механической теории фигур планет, ОНТИ, 1933.
 Слудский Ф. А., Общая теория фигуры Земли, Москва, 1888.
 Сретенский Л. Н., Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы, Успехи математич. наук 5, 187—230, 1938.
 Сретенский Л. Н., Ньютонова теория приливов и фигуры Земли. В сб. «Исаак Ньютон. 1643—1943», Изд. АН СССР, 1943.
 Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. III, ч. II, Теория фигур небесных тел, Гостехиздат, 1949.
 Фесенков В. Г., О сжатии Земли в связи с ее внутренним строением, Астрон. журн. 1, № 3—4, 98—101, 1924.
 Фесенков В. Г., О внутреннем строении Юпитера, Астрон. журн. 1, № 3—4, 102—105, 1924.
 Фесенков В. Г. и Масевич А. Г., К вопросу о химическом составе больших планет, Астрон. журн. 28, № 5, 1951.
 Brown H., On the compositions and structures of the planets, Astrophys. Journ. 111, 648—649, 1950.
 Bullen K., On the constitution of Mars, Monthly Not. Roy. Astr. Soc. 109, 688—692, 1949.
 Jeffereys H., The density distributions of the inner planets, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. suppl. 4, 62—71, 1937.
 Poincaré H., Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris, 1902.
 Ramsey W., On the constitution of the terrestrial planets, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 108, 406—413, 1948.
 Stokes G., On attraction and on Clairauts theorem, Stokes math. and phys. pap., v. II, Cambridge, 1883.
 Tisserand F., Traité de mécanique céleste, t. II, Paris, 1891; t. IV, chap. I—IX, Paris, 1896.
 Wavre R., Sur l'équilibre d'une masse fluide, Soc. phys. Geneve 43, 1926.
 Widorn T., A relation between radius and mass and the structure of the inner planets. Sitz-Ber. Osterr. Akad. Wiss., Abt. IIa, 157, 101—124, 1949; Mitteil. Sternw. Wien 4, № 8, 115—138, 1949.